详细解答

STEP III 2019，第 7 题

纯数学 · 曲线描绘

STEP III 2019，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2019 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

关键思路

方程只含 x^2 和 y^2，所以它是 x^2（或 y^2）的二次方程（quadratic）。这一下子给了我们两件工具：一是判别式（discriminant），它告诉我们曲线能取到哪些 y 值；二是以 y 表示 x^2 的明确公式。要看曲线在原点附近的形状，只保留最低次的项；要看远处的形状，则只保留最高次的项。在 $a = b$ 这个特殊情况下，方程可以完全因式分解（factorise）。

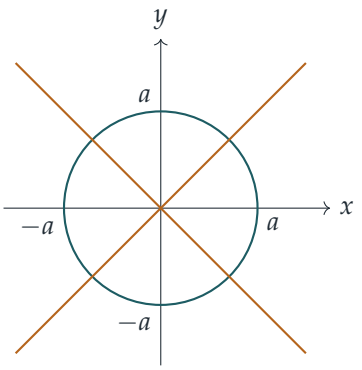
解答

第 (i) 部分

设 $a = b$，把所有项移到同一边，并把四次（quartic）项和二次项分组：

$$\begin{aligned} 0 &= (y^4 - x^4) - a^2(y^2 - x^2) \\ &= (y^2 - x^2)(y^2 + x^2) - a^2(y^2 - x^2) \\ &= (y^2 - x^2)(x^2 + y^2 - a^2). \end{aligned}$$

因此一点在曲线上，当且仅当 $y = \pm x$ 或 $x^2 + y^2 = a^2$：魔鬼曲线（Devil's Curve）就是两条直线 $y = x$ 和 $y = -x$，加上以原点为圆心、半径为 a 的圆。



第 (ii)(a) 部分

现在 $a=2$、$b=\sqrt{5}$，曲线为 $y^4-5y^2=x^4-4x^2$。固定 $y\geq 0$，并记 $X=x^2$。一点 (x,y)（其中 $x\geq 0$）在曲线上，当且仅当 $X\geq 0$ 满足

$$X^2-4X-(y^4-5y^2)=0.$$

要有实根，判别式必须非负：

$$\begin{aligned}16+4(y^4-5y^2)&=4(y^4-5y^2+4)=4(y^2-1)(y^2-4)\\&=4(y+1)(y+2)(y-1)(y-2)\geq 0.\end{aligned}$$

由于 $y\geq 0$，因子 $y+1$ 和 $y+2$ 都是正数，所以需要 $(y-1)(y-2)\geq 0$，即

$$0\leq y\leq 1 \quad \text{或} \quad y\geq 2.$$

反过来，每个这样的 y 都确实会出现。两个根是

$$X=2\pm\sqrt{D}, \qquad D=(y^2-1)(y^2-4),$$

其中较大的根至少是 2，所以它是合法的 x^2。下面会用到这条 x^2 的公式。

第 (ii)(b) 部分

在原点附近，四次项 y^4 和 x^4 与 y^2 和 x^2 相比微不足道。所以曲线近似于

$$-5y^2\approx -4x^2, \qquad \text{即} \qquad y\approx \tfrac{2}{\sqrt{5}}\,x \quad (x,y\geq 0).$$

曲线沿着斜率(gradient)为 $2/\sqrt{5}\approx 0.89$ 的直线离开原点，略低于直线 $y=x$。((a) 的公式也吻合：对于根 $X=2-\sqrt{D}$，用二项展开(binomial expansion)可得 $x^2=\frac{5}{4}y^2+O(y^4)$。)

在离原点很远处，最高次的项占主导：$y^4\approx x^4$，所以 $y\approx x$。我们还可以做得更好。把方程写成

$$(y^2-x^2)(y^2+x^2)=5y^2-4x^2 \quad\Longrightarrow\quad y^2-x^2=\frac{5y^2-4x^2}{y^2+x^2}.$$

由于 $y/x \to 1$，右边趋向 $\frac{5-4}{2} = \frac{1}{2}$。所以 $y^2 \approx x^2 + \frac{1}{2}$，从而

$$y \approx x + \frac{1}{4x}.$$

曲线以直线 $y = x$ 为渐近线（asymptote），并从上方趋近它。事实上，除原点外曲线从不与这条直线相交：把 $y = x$ 代入方程，得 $x^2 = 0$。

第 (ii)(c) 部分

对 $y^4 - 5y^2 = x^4 - 4x^2$ 关于 x 进行隐函数微分（implicit differentiation），

$$(4y^3 - 10y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 4x^3 - 8x \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2x(x^2-2)}{y(2y^2-5)}.$$

切线（tangent）平行于 x 轴：需要分子为零而分母不为零。所以 $x = 0$ 或 $x = \sqrt{2}$。

- $x = 0$：此时 $y^4 = 5y^2$，所以 $y = 0$ 或 $y = \sqrt{5}$。在 $(0, \sqrt{5})$，分母为 $\sqrt{5}(10-5) \neq 0$，所以这一点符合。
- $x = \sqrt{2}$：此时 $y^4 - 5y^2 = 4 - 8$，所以 $y^4 - 5y^2 + 4 = 0$，得 $y = 1$ 或 $y = 2$。这两处的分母分别是 -3 和 6，都不为零。

> **想一想** 原点处分子也是零，为甚么我们不把它算进去?

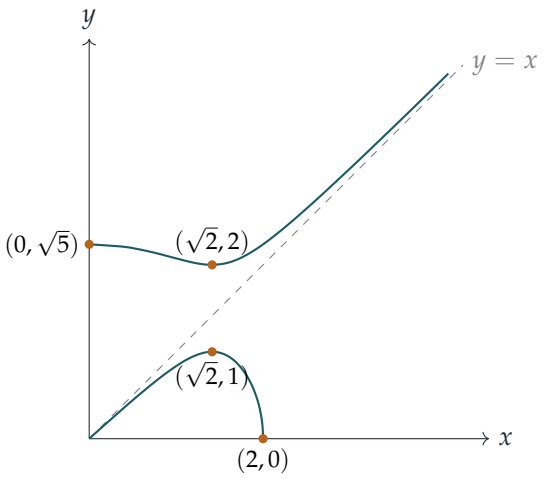
在 $(0,0)$，分母也是零，所以公式给出 $0/0$，甚么也说明不了。(b) 部分已经解决了这个问题：曲线以斜率 $2/\sqrt{5}$（而不是 0）穿过原点。

所以切线在 $(0, \sqrt{5})$、$(\sqrt{2}, 1)$ 和 $(\sqrt{2}, 2)$ 处是水平的。

切线平行于 y 轴：需要分母为零而分子不为零，所以 $y = 0$ 或 $y^2 = \frac{5}{2}$。但 $\sqrt{5/2} \approx 1.58$ 严格介乎 1 与 2 之间，已被 (a) 部分排除。当 $y = 0$ 时得 $x^4 = 4x^2$，所以 $x = 0$（又是原点，如上所述须排除）或 $x = 2$。在 $(2,0)$，分子为 $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \neq 0$。所以唯一这样的点是 $(2,0)$。

$x \geq 0$、$y \geq 0$ 部分的草图 利用 $x^2 = 2 \pm \sqrt{D}$，曲线分为两段。

- $0 \leq y \leq 1$ **的一个环**。根 $2 - \sqrt{D}$ 由 0（在 $y = 0$）增至 2（在 $y = 1$），而 $2 + \sqrt{D}$ 则由 4 减至 2。所以曲线以斜率 $2/\sqrt{5}$ 离开原点，升至 $(\sqrt{2}, 1)$ 处的极大值，再下降，在 $(2,0)$ 处垂直地与 x 轴相交。
- $y \geq 2$ **的一翼**。当 $2 \leq y \leq \sqrt{5}$ 时，根 $2 - \sqrt{D}$ 由 2 减至 0；超过 $y = \sqrt{5}$ 后它变成负数，不再是合法的 x^2。根 $2 + \sqrt{D}$ 则由 2 开始无界地增大。所以这一支由 $(0, \sqrt{5})$ 开始，切线水平，下降至 $(\sqrt{2}, 2)$ 处的极小值，然后上升，从上方趋近 $y = x$。

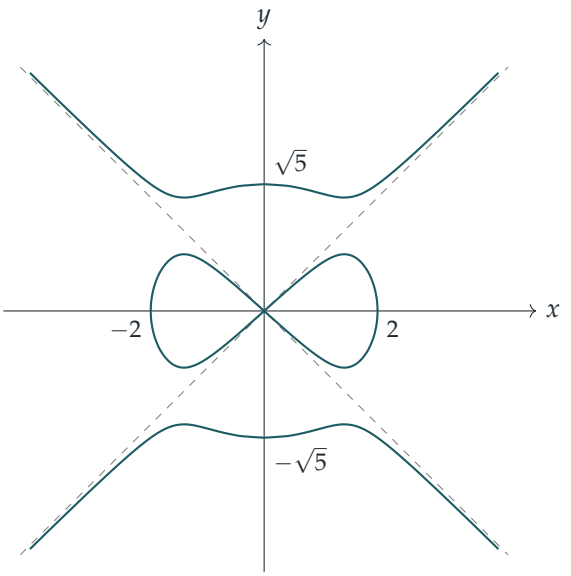


第 (iii) 部分

方程只涉及 x^2 和 y^2，所以曲线关于 y 轴对称（symmetric）（把 x 换成 $-x$），也关于 x 轴对称（把 y 换成 $-y$）。把四分之一的曲线分别对两条轴作反射：

- 环变成介乎 $x = -2$ 与 $x = 2$ 之间的“8”字形（figure-of-eight），且 $|y| \leq 1$。两瓣沿直线 $y = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}x$ 在原点相交，转向点（turning point）位于 $(\pm\sqrt{2}, \pm 1)$。
- 翼变成两支，一支在 $y \geq 2$，另一支在 $y \leq -2$。每支在 $(0, \pm\sqrt{5})$ 处有局部极大值（local maximum）或局部极小值，转向点位于 $(\pm\sqrt{2}, \pm 2)$，两支都从外侧趋近渐近线 $y = \pm x$。

曲线没有任何部分位于带状区域 $1 < |y| < 2$ 内。



验算

- 每个标示的点都满足方程。例如在 $(\sqrt{2}, 2)$，两边都等于 -4；在 $(0, \sqrt{5})$，两边都等于 0。
- 点 $(1, 1.5)$ 位于禁区带内。在该处左边为 $2.25 \times (-2.75) \approx -6.19$，而右边 $x^2(x^2-4)$ 永远不会小于 -4（这是它在 $x^2 = 2$ 处的最小值）。这正是判别式论证的缩影。
- 在翼上取 $y = 100$，公式给出 $x^2 = 2 + \sqrt{(10^4-1)(10^4-4)}$。于是 $4x(y-x) \approx 1.0002$，与 $y - x \approx \frac{1}{4x}$ 吻合。在原点附近，环上的比值 y/x 趋向 $0.8944 \approx 2/\sqrt{5}$。

常见错误

- 把 $(0,0)$ 列为切线水平（或垂直）的点。在该处 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 是 $0/0$，真正的斜率要由 (b) 得出。
- 把环画成沿 $y = x$ 离开原点，或把翼画成与 $y = x$ 相交。环的起始斜率是 $2/\sqrt{5} < 1$，而翼严格保持在 $y = x$ 上方。
- 忘记条件 $x^2 \geq 0$——正是这个条件令内侧的根在 $y = \sqrt{5}$ 处终止。

STEP 之外

魔鬼曲线是一条代数曲线（algebraic curve）：即多项式 $F(x, y)$ 的零点集。原点是一个奇点（singular point），在该处两个偏导数（partial derivative）F_x 和 F_y 都等于零。F 的最低次项给出该处的切线，这正是我们在 (b) 所做的；而最高次项则给出渐近线的方向。到了大学，这些概念会在隐函数定理（implicit function theorem）和代数几何（algebraic geometry）中再次出现。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等数学难题》）收录了更多 STEP 风格的曲线描绘题，并附有详尽评注。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。