详细解答

STEP III 2019，第 6 题

纯数学 · 阿根图上的圆

> **STEP III 2019，第 6 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2019 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

关键思路

开首那条式子其实就是乔装了的 $|z-a|^2-r^2$，所以轨迹（locus）是与 a 距离为 r 的点的集合。至于在 $\omega=1/z$ 之下的像，先代入 $z=1/\omega$，消去分母，再把结果整理回与原方程相同的形式。一旦化成这个形式，便可以比较系数（matching coefficients），直接读出圆心和半径。最后比较圆心和半径，就能判断 C' 与 C 何时是同一个圆。

解答

由于 $(z-a)^*=z^*-a^*$，

$$|z-a|^2=(z-a)(z^*-a^*)=zz^*-a^*z-az^*+aa^*,$$

所以题目给出的方程正好说 $|z-a|^2=r^2$，即 $|z-a|=r$（因为 $r>0$）。因此 C 是**圆心为 a、半径为 r 的圆**。

更一般地，若 $s>0$，方程 $ww^*-bw^*-b^*w+bb^*-s^2=0$ 表示圆心为 b、半径为 s 的圆。我们会把这个当作模板使用。

第 (i) 部分

首先，$z=0$ 不在 C 上：否则需要 $|a|=r$，即 $a^*a=r^2$，而这已被排除。所以对 C 上每一点，$\omega=1/z$ 都有定义，而且 $\omega\neq 0$。另外 $z=1/\omega$，所以 Q 在 C' 上当且仅当 $\omega\neq 0$ 且

$$\left|\frac{1}{\omega}-a\right|=r \iff |1-a\omega|=r|\omega| \iff (1-a\omega)(1-a^*\omega^*)=r^2\omega\omega^*.$$

展开并合并同类项，

$$(a^*a-r^2)\,\omega\omega^*-a\omega-a^*\omega^*+1=0.$$

设 $k = a^*a - r^2 = |a|^2 - r^2$，由题设它是一个非零实数。两边除以 k，

$$\omega\omega^* - \frac{a^*}{k}\omega^* - \frac{a}{k}\omega + \frac{1}{k} = 0.$$

这与模板吻合，其中 $b = a^*/k$（由于 k 是实数，所以 $b^* = a/k$），前提是 $bb^* - s^2 = 1/k$，即

$$s^2 = \frac{|a|^2}{k^2} - \frac{1}{k} = \frac{|a|^2 - k}{k^2} = \frac{r^2}{k^2}.$$

这是正数，所以 C' 确实是一个圆，其

$$\text{圆心为}\frac{a^*}{|a|^2 - r^2}, \qquad \text{半径为}\frac{r}{||a|^2 - r^2|}.$$

（注意 $\omega = 0$ 不满足这方程，因为它会给出 $1 = 0$。所以这个圆上每一点确实都是某个在 C 上的 z 的 $1/z$。）

想一想 两个圆何时相同?

两个圆相同，当且仅当它们有相同的圆心和相同的半径。所以 $C' = C$ 要求

$$\frac{r}{|k|} = r \qquad \text{及} \qquad \frac{a^*}{k} = a.$$

第一个条件给出 $|k| = 1$，即 $k^2 = 1$：

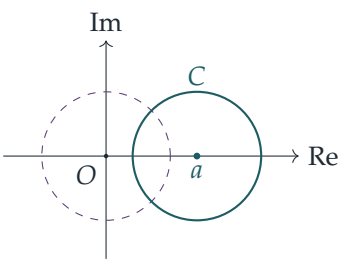
$$(|a|^2 - r^2)^2 = 1.$$

所以 $k = 1$ 或 $k = -1$，再由第二个条件得：

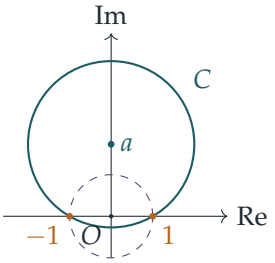
- 若 $k = 1$：$a^* = a$，所以 a 是**实数**；
- 若 $k = -1$：$a^* = -a$，所以 a 是**虚数**（纯虚数（purely imaginary））。

（若 $a = 0$，则两者皆是，此时 $r = 1$。）反过来，上述任一情况，加上半径条件，的确会令圆心和半径一致。

草图。若 a 是实数，则 $|a|^2 = r^2 + 1 > r^2$，所以圆心在实轴上，与 O 的距离为 $\sqrt{r^2+1}$，而原点位于 C 的外面。这个圆与实轴相交于 $a - r$ 和 $a + r$，两者之积为 $a^2 - r^2 = 1$，这是必然的，因为 $1/z$ 会把它们互换。若 a 是虚数，则 $|a|^2 = r^2 - 1$，所以这情况需要 $r \geq 1$。圆心在虚轴上，而原点位于 C 的里面。设 $a = \mathrm{i}c$，与实轴的交点满足 $x^2 + c^2 = r^2$，所以 $x = \pm 1$。在两种情况下，C 都与单位圆（虚线）成直角相交（正交（orthogonal）），因为 $|a|^2 = r^2 \pm 1$（左图中 $a = \sqrt{2}$，$r = 1$；右图中 $a = \mathrm{i}\sqrt{3}$，$r = 2$）。



a 为实数



a 为虚数

若 a 是实数，它当然也可以是负数，得出的是左图关于虚轴的镜像；同样，虚数 a 也可以位于实轴下方。

第 (ii) 部分

现在 $z = 1/\omega^*$，所以 Q 在轨迹上当且仅当

$$\left|\frac{1}{\omega^*} - a\right| = r \iff |1 - a\omega^*| = r|\omega^*| \iff |1 - a^*\omega| = r|\omega|,$$

这里是在第一个模（modulus）里面取共轭（conjugate）（一个数与它的共轭有相同的模）。这正是第 (i) 部分的方程，只是把 a 换成 a^*。所以由第 (i) 部分，轨迹是一个圆，其

$$\text{圆心为}\frac{a}{k}, \qquad \text{半径为}\frac{r}{|k|}, \qquad k = |a|^2 - r^2.$$

要这个圆就是 C，需要 $|k| = 1$ 及 $a/k = a$。若 $a \neq 0$，第二个条件迫使 $k = 1$，而条件就只有这些：条件正好是

$$|a|^2 = r^2 + 1,$$

它对 a 的辐角（argument）没有任何限制。（若 $a = 0$，则与之前一样需要 $r = 1$。）

? **想一想** 你能找出一个既非实数、亦非虚数的具体 a 吗?

取 $a = 1 + \mathrm{i}$ 及 $r = 1$。那么 $|a|^2 = 2 = r^2 + 1$，所以 Q 的轨迹就是 C，但 a 既不是实数，也不是纯虚数。所以答案是**否**：a 并不一定是实数或虚数。

验算

- 取 $a = \sqrt{5}, r = 2$（于是 $|a|^2 - r^2 = 1$），C 上的点 $z = \sqrt{5} \pm 2$ 映到 $1/(\sqrt{5} \pm 2) = \sqrt{5} \mp 2$，它们仍然在 C 上。
- 在第 (ii) 部分取 $a = 1 + \mathrm{i}$，$r = 1$：点 $z = 1$ 在 C 上，而 $1/z^* = 1$ 也在。点 $z = 2 + \mathrm{i}$ 给出 $1/z^* = (2 + \mathrm{i})/5 = 0.4 + 0.2\mathrm{i}$，而 $|(0.4 + 0.2\mathrm{i}) - (1 + \mathrm{i})|^2 = 0.36 + 0.64 = 1$。但 $1/z = 0.4 - 0.2\mathrm{i}$ 不在 C 上，所以这个圆在第 (i) 部分的映射下并不固定。

- 两部分中的像圆亦已用电脑验证：把随机圆上的大量点映射过去，再量度它们与预测圆心的距离。

常见错误

- 把 C' 的圆心写成 $a/(|a|^2 - r^2)$，而不是 $a^*/(|a|^2 - r^2)$。读出圆心需要看 ω^* 的系数，而不是 ω 的系数。
- 忘记半径 $r/\left||a|^2 - r^2\right|$ 中的绝对值。没有它的话，$|a| < r$ 的情况会得出负的半径。
- 在第 (ii) 部分照搬第 (i) 部分而答“是”，没有留意到共轭把条件 $a^* = \pm a$ 消除了。

STEP 之外

映射 $z \mapsto 1/z^*$ 是关于单位圆的反演（*inversion in the unit circle*），而 $z \mapsto 1/z$ 则是先作这个反演，再关于实轴作反射。两者都属于莫比乌斯变换（Möbius transformations）这个家族，这类变换总是把圆和直线映到圆和直线。第 (ii) 部分就是一个经典事实：一个圆在反演下固定，当且仅当它与反演圆成直角相交，即 $|a|^2 = r^2 + 1$（或者它就是单位圆本身）。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直观复分析》）以大量图像，优美地发展了这些概念。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。