详细解答

STEP III 2019，第 5 题

纯数学 · 代换积分法

STEP III 2019，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2019 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

关键思路

第 (i) 部分中的函数把 $[0,\infty)$ 光滑且递增地映射到 $[0,1)$ 上。因此只要把它乘以一个常数，就能把一个 y 积分（积分区间是 $[0,c)$ 的一部分）转化为一个 x 积分（积分区间是 $[0,\infty)$ 的一部分）。这样做亦会令 c^2-y^2 变成一个经过伪装的完全平方，从而消去那个麻烦的平方根。根号消失后，剩下的是一个有理（rational）被积函数（integrand），可以用题目注释中给出的反正切（arctangent）积分来处理。倒数代换（reciprocal substitution）$y=1/u$ 则把后面的积分联系回第一个积分。

解答

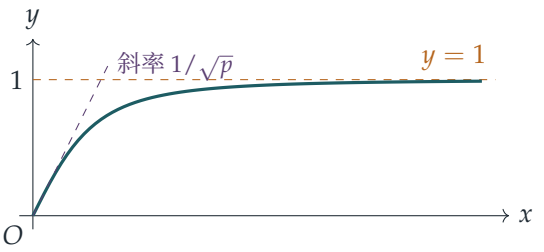
第 (i) 部分

设 $f(x)=x(x^2+p)^{-1/2}$ 且 $p>0$，则 $f(0)=0$，且

$$f'(x)=(x^2+p)^{-1/2}-x^2(x^2+p)^{-3/2}=\frac{p}{(x^2+p)^{3/2}}>0,$$

$$f''(x)=-\frac{3px}{(x^2+p)^{5/2}}<0 \quad \text{对于} x>0.$$

因此曲线以斜率（gradient）$1/\sqrt{p}$ 离开原点，并稳定上升，同时向下弯曲（即曲线是凹（concave）的）。由于当 $x>0$ 时 $f(x)=1/\sqrt{1+p/x^2}$，故当 $x\to\infty$ 时 $f(x)\to 1$，且由下方趋近，所以 $y=1$ 是曲线永远达不到的渐近线（asymptote）。



第 (ii) 部分

按试卷印刷的版本，代换式的分子是 b。这样行不通：它虽然令 b^2-y^2 变得整齐，却留下 $c^2(x^2+p)-b^2x^2$ 的平方根，而这并不是完全平方。真正可行的代换（亦即出题者的原意）分子是 c：

$$y=\frac{cx}{\sqrt{x^2+p}},\qquad p>0.$$

由第 (i) 部分，这是由 $x\in[0,\infty)$ 映射到 $y\in[0,c)$ 上的递增映射，而这正是 $\sqrt{c^2-y^2}$ 有定义的范围。于是

$$c^2-y^2=\frac{c^2(x^2+p)-c^2x^2}{x^2+p}=\frac{c^2p}{x^2+p},$$

$$b^2-y^2=\frac{b^2p+(b^2-c^2)x^2}{x^2+p},$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{cp}{(x^2+p)^{3/2}}\quad\text{（由第 (i) 部分）.}$$

由于 $c>0$ 及 $p>0$，有 $\sqrt{c^2-y^2}=c\sqrt{p}/\sqrt{x^2+p}$。代入得

$$I=\int\frac{x^2+p}{b^2p+(b^2-c^2)x^2}\cdot\frac{\sqrt{x^2+p}}{c\sqrt{p}}\cdot\frac{cp}{(x^2+p)^{3/2}}\,\mathrm{d}x=\int\frac{\sqrt{p}}{b^2p+(b^2-c^2)x^2}\,\mathrm{d}x.$$

取 $p=1$，得

$$I=\int\frac{1}{b^2+(b^2-c^2)x^2}\,\mathrm{d}x,$$

这正是所求的结果。所用的代换是 $y=cx/\sqrt{x^2+1}$，其反函数是 $x=y/\sqrt{c^2-y^2}$。

第一个积分。取 $b=\sqrt{3}$ 及 $c=\sqrt{2}$。于是 $x=y/\sqrt{2-y^2}$，因此 $y=1$ 对应 $x=1$，而当 $y\to\sqrt{2}$ 时 $x\to\infty$。原被积函数在 $y=\sqrt{2}$ 处趋于无穷，其增长方式如 $(2-y^2)^{-1/2}$，属于可积（integrable）的类型。代换后，积分变成 $[1,\infty)$ 上一个收敛（convergent）的反常积分（improper integral）：

$$\int_1^{\sqrt{2}}\frac{\mathrm{d}y}{(3-y^2)\sqrt{2-y^2}}=\int_1^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{3+x^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Big[\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}}\Big]_1^{\infty}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\Big(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\Big)=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

想一想 新的积分中出现的是 $3y^2-1$ 和 $2y^2-1$，而旧的积分中则是 $3-y^2$ 和 $2-y^2$。哪一种代换能把 y^2 与常数的角色互换?

第二个积分。 设 $y=1/u$，其中 $u>0$，于是 $\mathrm{d}y=-\mathrm{d}u/u^2$。那么

$$3y^2-1=\frac{3-u^2}{u^2},\qquad \sqrt{2y^2-1}=\frac{\sqrt{2-u^2}}{u},$$

而积分上下限 $y=\frac{1}{\sqrt2}$ 和 $y=1$ 分别变成 $u=\sqrt2$ 和 $u=1$。所以

$$\int_{1/\sqrt2}^{1}\frac{y\,\mathrm{d}y}{(3y^2-1)\sqrt{2y^2-1}}=\int_{\sqrt2}^{1}\frac{1}{u}\cdot\frac{u^2}{3-u^2}\cdot\frac{u}{\sqrt{2-u^2}}\cdot\left(-\frac{\mathrm{d}u}{u^2}\right)=\int_1^{\sqrt2}\frac{\mathrm{d}u}{(3-u^2)\sqrt{2-u^2}}.$$

这正好就是第一个积分，因此其值同样是 $\dfrac{\pi}{3\sqrt3}$。

第 (iii) 部分

同样的倒数代换 $y=1/u$ 会把被积函数变成 $u/\big((3-u^2)\sqrt{2-u^2}\big)$。多出来的因子 u 提示我们设 $w=\sqrt{2-u^2}$，因为这样便有 $3-u^2=1+w^2$。把两步合并，就得到单一个代换:

$$w=\frac{\sqrt{2y^2-1}}{y}=\sqrt{2-\frac{1}{y^2}},\qquad \text{故}\qquad w^2=2-\frac{1}{y^2},\quad 2w\,\mathrm{d}w=\frac{2}{y^3}\,\mathrm{d}y.$$

当 $y\in[\frac{1}{\sqrt2},1]$ 时，w 由 0 递增至 1。此外，$\mathrm{d}y=wy^3\,\mathrm{d}w$、$\sqrt{2y^2-1}=wy$，以及 $3y^2-1=y^2\big(3-\frac{1}{y^2}\big)=y^2(1+w^2)$。因此

$$\int_{1/\sqrt2}^{1}\frac{\mathrm{d}y}{(3y^2-1)\sqrt{2y^2-1}}=\int_0^1\frac{wy^3\,\mathrm{d}w}{y^2(1+w^2)\cdot wy}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}w}{1+w^2}=\frac{\pi}{4}.$$

（$y=1/\sqrt2$ 处的奇点（singularity）同样只属于 $(2y^2-1)^{-1/2}$ 这种可积的类型，而代换把它消除了。）

这其实是经过伪装的第 (ii) 部分方法。设 $x=1/w$，便得 $y=x/\sqrt{2(x^2-1)}$，这正是取 $c^2=\frac12$ 及 $p=-1$ 时的一般代换。这就是第 (i) 部分容许 p 为负数的原因。

验算

- $\pi/(3\sqrt3)\approx0.6046$，而 $\pi/4\approx0.7854$。先用三角代换消除端点的奇点，再对原积分进行数值积分（numerical integration），两个数值均得到证实。
- 第一个积分的粗略大小检查：在 $[1,\sqrt2]$ 上有 $1\le3-y^2\le2$，所以积分值介乎 $\frac12$ 倍与 1 倍的 $\int_1^{\sqrt2}(2-y^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}y=\frac{\pi}{4}$ 之间。由此得出的范围是 0.39 至 0.79，而 0.6046 稳稳落在其中。

- 在某一点检验第 (ii) 部分的恒等式：取 $b=\sqrt{3}$、$c=\sqrt{2}$ 及 $x=1$，得 $y=1$。此时被积函数的值是 $\frac{1}{2}$，$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=\sqrt{2}/2^{3/2}=\frac{1}{2}$，两者之积是 $\frac{1}{4}=1/(3+1)$，与预期相符。

常见错误

- 坚持使用代换式中印出来的 b，结果卡住：需要消去的平方根是 $\sqrt{c^2-y^2}$，所以缩放因子必须是 c。
- 转换积分上下限时出错。这里 $y=\sqrt{2}=c$ 对应的是 $x=\infty$，而不是某个有限的 x 值。
- 漏掉 $\mathrm{d}y=-\mathrm{d}u/u^2$ 中的负号，或忘记把上下限调换回来，以致一个正的被积函数得出负的答案。

STEP 之外

这里用到的代换属于有理化代换（rationalising substitution）。它们把含有二次式平方根的被积函数变成有理函数，之后再用部分分式（partial fractions）或 $\tan^{-1}$ 便可完成。在大学一年级的分析（analysis）课程中，你会学到这里所用反常积分背后的理论：含无穷上下限或无界被积函数的积分何时收敛，以及为何代换法对这类积分仍然成立。Bartle 与 Sherbert 合著的 *Introduction to Real Analysis*（《实分析导论》）对这两方面都有仔细的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。