详细解答

STEP III 2019，第 4 题

纯数学 · 根与系数

STEP III 2019，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2019 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

关键思路

交替出现的正负号正是韦达定理（Vieta's formulas）中的符号：以 $r_1,\dots,r_n$ 为根的首一多项式（monic polynomial）是 $x^n - e_1x^{n-1} + e_2x^{n-2} - \cdots + (-1)^n e_n$，其中 e_k 是从各根中任取 k 个相乘所得的所有乘积之和。因此，“自反”（reflexive）其实只是说对每个 k 都有 $e_k(a_1,\dots,a_n) = a_k$。这样，较小的情况就只是几条联立方程，而各根的平方和 $e_1^2 - 2e_2$ 则给出 (ii) 中的恒等式。一旦证得 $a_n = 0$，就可以抽出因式 x，把多项式逐层剥减。

解答

以下一律以 e_k 表示 $a_1,\dots,a_n$ 的第 k 个初等对称函数（elementary symmetric function）。根据韦达定理，P 的根是 $a_1,\dots,a_n$ 若且唯若

$$e_k(a_1,\dots,a_n) = a_k \qquad \text{对} k = 1,2,\dots,n.$$

第 (i) 部分

一次。 $\mathrm{P}(x) = x - a_1$ 的根是 a_1，所以所有这类多项式都是自反的：对任意实数 a，$\mathrm{P}(x) = x - a$。

二次。 我们需要 $a_1 + a_2 = a_1$ 及 $a_1a_2 = a_2$。由第一条得 $a_2 = 0$，此时第二条自动成立。所以对任意实数 a，$\mathrm{P}(x) = x^2 - ax = x(x-a)$；它的根 a 和 0 确实分别是 a_1 和 a_2。

三次。我们需要

$$a_1 + a_2 + a_3 = a_1,$$
$$a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 = a_2,$$
$$a_1a_2a_3 = a_3.$$

由第一条得 $a_3 = -a_2$。于是第二条变成 $a_1(a_2 + a_3) + a_2a_3 = a_2$，即 $-a_2^2 = a_2$，所以 $a_2 = 0$ 或 $a_2 = -1$。

- 若 $a_2 = 0$，则 $a_3 = 0$，而第三条方程变成 $0 = 0$。所以 a_1 可以任意取值：$\mathrm{P}(x) = x^3 - ax^2 = x^2(x - a)$。
- 若 $a_2 = -1$，则 $a_3 = 1$，而第三条方程给出 $-a_1 = 1$，所以 $a_1 = -1$。由此得

  $$\mathrm{P}(x) = x^3 + x^2 - x - 1 = (x + 1)^2(x - 1),$$

  它的根 $-1, -1, 1$ 确实是 a_1, a_2, a_3。

所以次数不超过 3 的自反多项式是

$$x - a, \qquad x^2 - ax, \qquad x^3 - ax^2 \quad (a \in \mathbb{R}), \qquad \text{以及} \qquad x^3 + x^2 - x - 1.$$

第 (ii) 部分

各根的平方和是

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = e_1^2 - 2e_2,$$

因为把 e_1 平方后，每个 a_i^2 出现一次，而每个乘积 a_ia_j（$i < j$）出现两次。对自反多项式而言，$e_1 = a_1$ 且 $e_2 = a_2$，所以

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = a_1^2 - 2a_2, \qquad \text{即} \qquad 2a_2 = -a_2^2 - a_3^2 - \cdots - a_n^2,$$

这就是所求的结果。（这对每个 $n \geq 2$ 都成立。）

现在假设各 a_k 都是整数，$a_n \neq 0$，并用反证法（proof by contradiction）假设 $n > 3$。把 a_2^2 移到另一边并配方（completing the square），得

$$(a_2 + 1)^2 = 1 - \left(a_3^2 + a_4^2 + \cdots + a_n^2\right).$$

想一想 整数条件如何把这条方程“夹紧”？

左边至少是 0，所以 $a_3^2 + \cdots + a_n^2 \leq 1$。但 a_n 是非零整数，所以 $a_n^2 \geq 1$。因此这个和恰好等于 1：$a_n^2 = 1$，而其余各项都是零，所以 $a_3 = a_4 = \cdots = a_{n-1} = 0$，同时 $a_2 = -1$。由于 $n \geq 4$，数列 $a_3, \ldots, a_{n-1}$ 并非空的，特别地 $a_3 = 0$。现在，最后一条韦达方程说各根之积等于 a_n：

$$a_n = e_n = a_1a_2a_3 \cdots a_n = 0,$$

因为 $a_3 = 0$。这与 $a_n \neq 0$ 矛盾。所以 $n \leq 3$。

第 (iii) 部分

抽出因式 x。假设 P 是次数 $n \geq 2$ 的自反多项式，且 $a_n = 0$。那么 $\mathrm{P}(x) = x\,\mathrm{Q}(x)$，其中

$$\mathrm{Q}(x) = x^{n-1} - a_1 x^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1} a_{n-1}.$$

P 的根是 $a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$，其中 $a_n = 0$，而因式 x 对应其中一个根 0。所以 Q 的根就是余下的 $a_1, \ldots, a_{n-1}$：Q 是自反的，而且系数相同（同样是整数）。反过来，若 Q 是次数 m 的自反多项式，系数为 $a_1, \ldots, a_m$，那么 $x\,\mathrm{Q}(x)$ 的系数是 $a_1, \ldots, a_m, 0$，根是 $a_1, \ldots, a_m, 0$，所以它也是自反的。

逐层剥减。从任何整系数自反多项式 P 出发。只要它的次数至少是 2 而最后一个系数是 0，就抽出一个因式 x。这个过程最终停在 $\mathrm{P}(x) = x^m \mathrm{R}(x)$，其中 $m \geq 0$，而 R 是次数为 k 的整系数自反多项式，且要么 $k = 1$，要么最后一个系数 a_k 非零。

- 若 $a_k \neq 0$，则由第 (ii) 部分得 $k \leq 3$（若 $k \leq 3$ 则无需证明）。根据第 (i) 部分的列表：$k = 1$ 时得 $x - a$，其中 $a \neq 0$；$k = 2$ 时最后一个系数必定是 0，所以没有；$k = 3$ 时唯一满足 $a_3 \neq 0$ 的是 $x^3 + x^2 - x - 1$。
- 若 $k = 1$ 且 $a_1 = 0$，则 $\mathrm{R}(x) = x$。

把 $\mathrm{R}(x) = x$ 并入 $x - a$ 中 $a = 0$ 的情况，再利用上述的逆命题得知每个乘以 x^m 的倍式都是自反的，便知整系数自反多项式恰好是

$$x^m(x - a) \quad (m \geq 0,\ a \in \mathbb{Z}),$$
$$x^m(x^3 + x^2 - x - 1) = x^m(x+1)^2(x-1) \quad (m \geq 0).$$

验算

- $x^2(x+1)^2(x-1) = x^5 + x^4 - x^3 - x^2$ 的 $a_1, \ldots, a_5 = -1, -1, 1, 0, 0$，根是 $-1, -1, 1, 0, 0$：它是自反的。(ii) 中的恒等式变成 $2(-1) = -(1 + 1 + 0 + 0)$，成立。
- 用电脑搜索所有 $n \leq 7$、$a_1, \ldots, a_n$ 取 $\{-3, \ldots, 3\}$ 中整数的情况，除上列者外没有找到其他自反多项式；对 $n = 2, 3$ 在较小的有理数中搜索，亦印证了第 (i) 部分的列表。

常见错误

- 遗漏含自由参数的多项式族：$x^2 - ax$ 和 $x^3 - ax^2$ 对每个实数 a 都是自反的，而不只是对某些特殊值。

- 在 (ii) 中，求得 $a_n = \pm 1$、$a_2 = -1$ 便停下来。矛盾其实来自各根之积：当 $n \geq 4$ 时，$a_3, \ldots, a_{n-1}$ 中有零，所以积为零。
- 在 (iii) 中，只说“$a_n = 0$，所以除以 x”，却没有验证商式仍然是自反的：一个零根对应因式 x，而余下的根要与余下的系数吻合。

STEP 之外

方程组 $e_k(a_1, \ldots, a_n) = a_k$ 是多项式方程组的一个小例子，其解构成一个代数簇（algebraic variety），在这里是若干直线与孤立点的并集。“平方和 $= e_1^2 - 2e_2$”这个事实是牛顿（Newton）恒等式（Newton's identities）中的第一条；这些恒等式把各根的幂和与系数联系起来，是对称函数理论的基础。“若干整数的平方之和不超过 1”这一步，是丢番图（Diophantine）论证中的典型手法。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算术》）和 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《环、域与群》）都是进一步探索这些概念的好起点。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。