详细解答

STEP III 2019，第 3 题

纯数学 · 矩阵的不变直线

> **STEP III 2019，第 3 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2019 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

关键思路

点 (x, y) 是不变点（invariant point），当且仅当 $(\mathbf{A} - \mathbf{I})$ 把它映到零，由此得到两条线性方程（linear equations）。第 (i) 和第 (ii) 部分的所有内容，都源于追问：这两条方程何时描述同一条直线？其条件是 $(a-1)(d-1) = bc$，亦即 $\det(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = 0$。在第 (iii) 部分，我们把直线上的一般点代入变换，然后比较系数。

解答

第 (i) 部分

点 (x, y) 是不变点，当 $ax + by = x$ 且 $cx + dy = y$，即

$$(a-1)x = -by, \tag{1}$$

$$(d-1)y = -cx. \tag{2}$$

把 (1) 和 (2) 相乘，得 $(a-1)(d-1)xy = bc\,xy$，所以对 L_1 上每一点 (x, y) 都有

$$((a-1)(d-1) - bc)xy = 0$$

，此即所求。

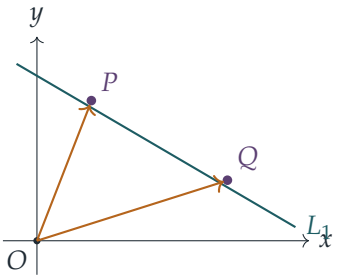
至于第二个结果，我们需要 L_1 上一个满足 $xy \neq 0$ 的点，这样才可以除以 xy。

? **想一想** 如果 L_1 上每一点都有 $x = 0$ 或 $y = 0$，那又如何？

集合 $xy = 0$ 正是两条坐标轴。一条位于两轴之并集内的直线必定是其中一条坐标轴，所以除非 L_1 是坐标轴，否则它必含一个 $xy \neq 0$ 的点。于是除以 xy，便得 $(a-1)(d-1) = bc$。

剩下的是坐标轴的情况。若 L_1 是 y 轴，则每个 $(0, y)$ 都是不变点，而 (1) 和 (2) 给出对所有 y 皆有 $by = 0$ 及 $(d-1)y = 0$。所以 $b = 0$ 且 $d = 1$，而 $(a-1)(d-1) = bc$ 两边都是 0。若 L_1 是 x 轴，同理得 $c = 0$ 且 $a = 1$，两边同样是 0。因此在所有情况下都有 $(a-1)(d-1) = bc$。

现在假设 L_1 不经过原点。在 L_1 上取两个不同的点 P 和 Q，其位置向量 (position vectors) 分别为 $\mathbf{p}$ 和 $\mathbf{q}$。



由于 O、P、Q 不共线，$\mathbf{p}$ 与 $\mathbf{q}$ 不平行，所以每个向量都可写成 $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{p} + \mu\mathbf{q}$。由线性性 (linearity)，

$$\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{Ap} + \mu\mathbf{Aq} = \lambda\mathbf{p} + \mu\mathbf{q} = \mathbf{v},$$

所以平面上每一点都是不变点，且 $\mathbf{A} = \mathbf{I}$。(此时 $a = d = 1$ 及 $b = c = 0$，与 $(a-1)(d-1) = bc$ 吻合。)

第 (ii) 部分

假设 $(a-1)(d-1) = bc$。我们需要找一条直线，使 (1) 和 (2) 在其上都成立。

情况 $b \neq 0$。取直线 $(a-1)x + by = 0$；由于 $b \neq 0$，这确实是一条通过原点的直线。直线上每一点都满足 (1)。在这条直线上 $y = -\frac{(a-1)x}{b}$，所以

$$cx + (d-1)y = cx - \frac{(a-1)(d-1)}{b}\,x = cx - \frac{bc}{b}\,x = 0,$$

因此 (2) 亦成立。所以 $(a-1)x + by = 0$ 是一条不变点直线 (line of invariant points)。

情况 $b = 0$。此时条件变为 $(a-1)(d-1) = 0$，所以 $a = 1$ 或 $d = 1$。

- 若 $a \neq 1$，则 $d = 1$。方程 (1) 变成 $(a-1)x = 0$，所以 $x = 0$；而 (2) 变成 $cx = 0$，在 $x = 0$ 时成立。不变点直线就是 y 轴 $x = 0$。
- 若 $a = 1$，则 (1) 对每一点都成立，我们只需 (2)：$cx + (d-1)y = 0$。
  - 若 c 与 $d-1$ 不同时为零，这是一条通过原点的直线，而且是一条不变点直线。
  - 若 $c = 0$ 且 $d = 1$，则 $\mathbf{A} = \mathbf{I}$，每一点都是不变点，每一条直线都是不变点直线。

所以只要 $(a-1)(d-1) = bc$，就存在一条不变点直线。

第 (iii) 部分

由于 L_2 不经过原点，可把 L_2 写成 $y = mx + k$，其中 $k \neq 0$。L_2 上的一般点是 $(x,\, mx + k)$，其像为

$$(X, Y) = \big((a + bm)x + bk,\ (c + dm)x + dk\big).$$

这条直线是不变直线（invariant line），当且仅当对每个实数 x 都有 $Y = mX + k$：

$$(c + dm)x + dk = m(a + bm)x + mbk + k.$$

两边都是 x 的一次式，且对所有 x 都相等，所以系数必须相同：

$$\text{常数项：}\quad dk = mbk + k, \tag{3}$$

$$\text{一次项系数，关于}x\text{：}\quad c + dm = am + bm^2. \tag{4}$$

想一想 我们在哪里用到 L_2 不经过原点这个事实？

我们在 (3) 中用到它：因为 $k \neq 0$，可以除以 k，得 $d - 1 = mb$。把 $d = 1 + mb$ 代入 (4)，

$$c = am + bm^2 - dm = am + bm^2 - m - bm^2 = m(a - 1).$$

因此

$$bc = bm(a - 1) = (d - 1)(a - 1),$$

此即所求结果。（若 $k = 0$，方程 (3) 不提供任何信息，这正是通过原点的直线可以在不满足该条件下仍是不变直线的原因。旋转 π 就是一例：它把每条通过 O 的直线映到自身，但 $(a-1)(d-1) = 4 \neq 0 = bc$。）

验算

- 试取 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$：此时 $(a-1)(d-1) = -2 = bc$。第 (ii) 部分预测不变直线为 $2x + 2y = 0$，即 $y = -x$，而确实有 $\mathbf{A}(1,-1)^{\mathrm{T}} = (1,-1)^{\mathrm{T}}$。
- 对于第 (iii) 部分，取 $m = 2$、$k = 1$、$a = 3$、$b = 1$。则 $d = 1 + mb = 3$ 及 $c = m(a-1) = 4$。$y = 2x + 1$ 上的点 $(1,3)$ 映到 $(6,13)$，而 $13 = 2 \times 6 + 1$。此外 $(a-1)(d-1) = 4 = bc$。
- 我们用电脑验证了数以千计的随机矩阵：所找到的每条满足 $k \neq 0$ 的不变直线 $y = mx + k$ 都有 $d - 1 = mb$、$c = m(a-1)$ 及 $(a-1)(d-1) = bc$；而每条不经过原点的不动点直线都来自 $\mathbf{A} = \mathbf{I}$。

常见错误

- 在第 (i) 部分除以 xy，却没有处理 L_1 是坐标轴的情况。
- 在第 (ii) 部分 $b = 0$ 时漏掉某个子情况，特别是 $\mathbf{A} = \mathbf{I}$，此时每条直线都符合。
- 在第 (iii) 部分混淆了*不变直线*（点仍留在直线上）与*不变点直线*（点本身不动），因而错误地设 $X = x$。

STEP 之外

条件 $(a-1)(d-1) = bc$ 就是 $\det(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = 0$，表示 1 是 $\mathbf{A}$ 的特征值（eigenvalue）。通过原点的不变点直线，就是该特征值的特征空间（eigenspace）。第 (iii) 部分说明，一条不经过原点的不变直线同样迫使 1 成为特征值。关系式 $c = m(a-1)$ 和 $d - 1 = mb$ 表示 $\mathbf{A} - \mathbf{I}$ 的第二行是第一行的 m 倍，所以 $\mathbf{A} - \mathbf{I}$ 的秩（rank）最多是 1，并把每一点沿平行于 L_2 的方向移动。关于特征值、特征向量（eigenvectors）及线性映射的几何，可参阅 Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《线性代数导论》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。