详细解答

STEP III 2019，第 2 题

纯数学 · 函数方程

STEP III 2019，第 2 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2019 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

本题在 *Beyond STEP* 第 3.8 节由加法公式决定的函数中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch03/addition-laws.html

关键思路

函数方程（functional equation）有一个特点：只要知道函数在某一点附近的表现，就能确定整个函数。代入 $x = y = 0$ 可以确定函数在 0 的值；然后在一般的 x 处写出差商（difference quotient），再利用函数方程把它化成在 0 处的差商，而我们知道这个差商的极限（limit）是 k。这样便得到一条微分方程（differential equation），再配合先前求得的初始值（initial value）把它解出来。

解答

第 (i) 部分

在 0 的值。在函数方程中代入 $x = y = 0$：$f(0) = f(0)^2$，所以 $f(0) = 0$ 或 $f(0) = 1$。

假设 $f(0) = 0$。代入 $y = 0$，对每个 x 都有 $f(x) = f(x)f(0) = 0$，所以 f 是零函数，而 $f'(0) = 0$。这与 $f'(0) = k \neq 0$ 矛盾。因此 $f(0) = 1$。

导数（derivative）。由 $(*)$ 及取 $y = h$ 的函数方程，

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x)f(h) - f(x)}{h} = f(x) \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - 1}{h}.$$

由于 $f(0) = 1$，最后的极限就是 $\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$，根据 $(*)$ 在 $x = 0$ 的情况，它等于

$\mathrm{f}'(0) = k$。所以

$$\mathrm{f}'(x) = k\,\mathrm{f}(x),$$

即为所求。（我们可以把 $\mathrm{f}(x)$ 提到极限之外，因为它与 h 无关。）

求解。与其除以 f（这需要 $\mathrm{f} \neq 0$），不如考虑 $u(x) = \mathrm{e}^{-kx}\mathrm{f}(x)$。于是

$$u'(x) = \mathrm{e}^{-kx}\big(\mathrm{f}'(x) - k\,\mathrm{f}(x)\big) = 0,$$

所以 u 是常数，等于 $u(0) = \mathrm{f}(0) = 1$。因此

$$\mathrm{f}(x) = \mathrm{e}^{kx}.$$

这确实满足所有条件：$\mathrm{e}^{k(x+y)} = \mathrm{e}^{kx}\mathrm{e}^{ky}$，而且它在 0 的导数是 k。

第 (ii) 部分

在 0 的值。代入 $x = y = 0$：

$$\mathrm{g}(0) = \frac{2\mathrm{g}(0)}{1+\mathrm{g}(0)^2} \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{g}(0)\big(\mathrm{g}(0)^2 - 1\big) = 0,$$

所以 $\mathrm{g}(0) \in \{0, 1, -1\}$。由于对所有 x 都有 $|\mathrm{g}(x)| < 1$，必然有 $\mathrm{g}(0) = 0$。另外留意，$|\mathrm{g}| < 1$ 保证了 $1 + \mathrm{g}(x)\mathrm{g}(y) > 0$，所以函数方程永远不会出现除以零的情况。

差商。利用取 $y = h$ 的函数方程，并把各项通分，

$$\mathrm{g}(x+h) - \mathrm{g}(x) = \frac{\mathrm{g}(x) + \mathrm{g}(h) - \mathrm{g}(x) - \mathrm{g}(x)^2\mathrm{g}(h)}{1 + \mathrm{g}(x)\mathrm{g}(h)} = \frac{\mathrm{g}(h)\big(1 - \mathrm{g}(x)^2\big)}{1 + \mathrm{g}(x)\mathrm{g}(h)}.$$

除以 h，

$$\frac{\mathrm{g}(x+h) - \mathrm{g}(x)}{h} = \big(1 - \mathrm{g}(x)^2\big) \cdot \frac{\mathrm{g}(h)}{h} \cdot \frac{1}{1 + \mathrm{g}(x)\mathrm{g}(h)}.$$

? **想一想** 当 $h \to 0$ 时，右边每个因子会怎样变化？

第一个因子不涉及 h。由于 $\mathrm{g}(0) = 0$, 中间的因子就是 $\dfrac{\mathrm{g}(0+h) - \mathrm{g}(0)}{h}$, 它趋向 $\mathrm{g}'(0) = k$。至于最后的因子,我们需要 $\mathrm{g}(h) \to \mathrm{g}(0) = 0$:这是成立的,因为 g 在 0 可微(differentiable),因此在 0 连续（continuous）。所以最后的因子趋向 1，而

$$\mathrm{g}'(x) = k\big(1 - \mathrm{g}(x)^2\big).$$

求解。因为 $|\mathrm{g}(x)| < 1$，因子 $1 - \mathrm{g}(x)^2$ 永不为零，所以我们可以分离变量（separation of variables）：

$$\int \frac{\mathrm{d}g}{1 - g^2} = \int k\,\mathrm{d}x.$$

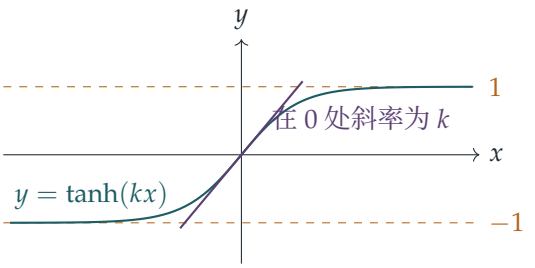
利用部分分式（partial fractions），$\dfrac{1}{1-\mathrm{g}^2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1+\mathrm{g}} + \dfrac{1}{1-\mathrm{g}}\right)$，而 $1 \pm \mathrm{g}$ 两者皆为正数，所以

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+\mathrm{g}(x)}{1-\mathrm{g}(x)} = kx + c.$$

在 $x = 0$ 时左边等于 $\frac{1}{2}\ln 1 = 0$，所以 $c = 0$。因此 $\dfrac{1+\mathrm{g}}{1-\mathrm{g}} = \mathrm{e}^{2kx}$，解出 g，

$$\mathrm{g}(x) = \frac{\mathrm{e}^{2kx}-1}{\mathrm{e}^{2kx}+1} = \tanh(kx).$$

这确实可行：$|\tanh(kx)| < 1$；加法公式（addition formula）$\tanh(a+b) = \dfrac{\tanh a + \tanh b}{1 + \tanh a \tanh b}$ 正正就是这条函数方程；而 $\tanh(kx)$ 在 0 的导数是 k。



验算

- 在 (i) 中，取 $\mathrm{f}(x) = \mathrm{e}^{kx}$，$k = 1$，$x = 0.3$，$y = 0.5$：$\mathrm{e}^{0.3}\mathrm{e}^{0.5} = 1.3499 \times 1.6487 = 2.2255 = \mathrm{e}^{0.8}$。
- 在 (ii) 中，取 $k = 1$，$x = 0.3$，$y = 0.5$：$\tanh 0.3 = 0.29131$，$\tanh 0.5 = 0.46212$，而 $(0.29131 + 0.46212)/(1 + 0.29131 \times 0.46212) = 0.66404 = \tanh 0.8$。
- 两个答案亦已用电脑对大量随机的 k、x、y 作出验证，包括导数关系 $\mathrm{f}' = k\mathrm{f}$ 及 $\mathrm{g}' = k(1-\mathrm{g}^2)$。
- 两部分是互相关连的：$\tanh(kx) = \dfrac{\mathrm{e}^{2kx}-1}{\mathrm{e}^{2kx}+1}$ 是由第 (i) 部分的指数函数构成，只是以 $2k$ 代替 k。

常见错误

- 没有给出理由便舍弃 $\mathrm{f}(0) = 0$ 或 $\mathrm{g}(0) = \pm 1$。条件 $k \neq 0$ 及 $|\mathrm{g}| < 1$ 正是为了排除这些情况而设的。
- 在分母中令 $\mathrm{g}(h) \to 0$ 却没有说明原因：这需要 g 在 0 连续，而连续性来自可微性。

► 除以 f 或 $1 - g^2$ 之前没有检查它是否非零。

STEP 之外

这些都是柯西型函数方程（*Cauchy-type functional equations*）的例子。大学第一个分析（analysis）课程会证明：在远比可微性弱的假设下，例如只在某一点连续，指数方程 $f(x+y) = f(x)f(y)$ 便迫使 $f(x) = e^{kx}$（或 $f \equiv 0$）；而如果没有任何正则性（regularity）条件，则会出现极其怪异的解。tanh 方程正是狭义相对论（special relativity）中的速度相加定律，在那里速度的 $\tanh^{-1}$（称为快度（rapidity））只需直接相加。想了解背后的分析，可参阅 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。