详细解答

STEP III 2019，第 10 题

力学 · 斜碰撞

STEP III 2019，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2019 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

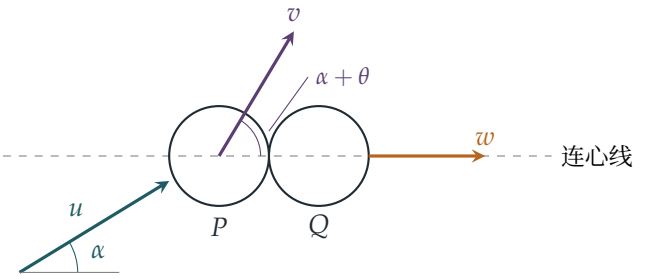
www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

关键思路

把每个速度分解为沿连心线 (line of centres) 的分量和垂直于连心线的分量。由于两球都是光滑的，冲量 (impulse) 只沿连心线作用，所以 P 的垂直分量保持不变，而 Q 则沿该直线运动。动量守恒 (conservation of momentum) 和牛顿实验定律 (Newton's experimental law) 在连心线方向上的应用，就跟一维碰撞完全一样。余下的只是三角学。

解答

把 P 和 Q 视为放在光滑水平桌面上、质量同为 m 的光滑球体。取碰撞瞬间的连心线为 x 方向，由 P 指向 Q；并设 y 方向在运动平面内与之垂直，指向 P 初速度所在的一侧。



第 (i) 部分

碰撞前，P 沿连心线的分量为 $u\cos\alpha$，垂直于连心线的分量为 $u\sin\alpha$。

光滑球体之间的接触力沿连心线作用。因此 P 在垂直于该直线的方向上不受冲量，P 的垂直分量保持不变。此外，Q 起初静止，而且只受沿连心线的冲量，所以它以速率 w 沿

该直线运动。

> ? **想一想** 为甚么 P 的新方向与连心线所成的角是 $\alpha+\theta$，而不是 $\alpha-\theta$?

P 所受的冲量沿连心线指向后方。它把 P 的 x 分量由 $u\cos\alpha$ 减小至下面求得的 v_x，而不影响 y 分量。因此速度方向偏离连心线，与该直线所成的角由 α 增大至 $\alpha+\theta$。下面我们会证实当 $e<1$ 时 $v_x>0$，所以 $0<\alpha+\theta<\frac{\pi}{2}$。

碰撞后，P 沿连心线的分量为 $v\cos(\alpha+\theta)$，垂直于连心线的分量为 $v\sin(\alpha+\theta)$。令垂直分量相等，得

$$u\sin\alpha = v\sin(\alpha+\theta),$$

正如所求。

沿连心线方向，由动量守恒（两者质量相等，所以可约去 m）得

$$u\cos\alpha = v\cos(\alpha+\theta)+w. \tag{1}$$

代入第一个结果中的 $u = v\sin(\alpha+\theta)/\sin\alpha$，

$$\begin{aligned} w &= \frac{v\sin(\alpha+\theta)\cos\alpha}{\sin\alpha} - v\cos(\alpha+\theta) \\ &= \frac{v\left[\sin(\alpha+\theta)\cos\alpha - \cos(\alpha+\theta)\sin\alpha\right]}{\sin\alpha} = \frac{v\sin\theta}{\sin\alpha}, \end{aligned}$$

这里用了 $\sin\big((\alpha+\theta)-\alpha\big)$ 的展开式。所以

$$w = \frac{v\sin\theta}{\sin\alpha}.$$

这个结果有一个漂亮的诠释。向量形式的动量守恒给出 $\mathbf{u} = \mathbf{v}+\mathbf{w}$，沿垂直于 $\mathbf{u}$ 的方向分解，便得 $0 = v\sin\theta - w\sin\alpha$。

第 (ii) 部分

沿连心线应用牛顿实验定律：分离速率等于接近速率的 e 倍：

$$w - v\cos(\alpha+\theta) = e\,u\cos\alpha. \tag{2}$$

代入第 (i) 部分的 $w = v\sin\theta/\sin\alpha$ 和 $u = v\sin(\alpha+\theta)/\sin\alpha$：

$$\frac{v\sin\theta}{\sin\alpha} - v\cos(\alpha+\theta) = \frac{e\,v\sin(\alpha+\theta)\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

两边乘以 $\sin\alpha/v$（因为 $v>0$ 且 $\sin\alpha\neq 0$，所以可以这样做），整理后得

$$\sin\theta = \cos(\theta+\alpha)\sin\alpha + e\sin(\theta+\alpha)\cos\alpha,$$

正如所求。

要求 $\tan\theta$，先把两个复角展开：

$$\sin\theta = (\cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha)\sin\alpha + e(\sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha)\cos\alpha.$$

把含 $\sin\theta$ 的项移到左边：

$$\sin\theta\left(1 + \sin^2\alpha - e\cos^2\alpha\right) = (1+e)\cos\theta\sin\alpha\cos\alpha.$$

两边除以 $\cos\theta\cos^2\alpha$，并记 $t = \tan\alpha$，利用 $1/\cos^2\alpha = 1 + t^2$：

$$\tan\theta\left(1 + t^2 + t^2 - e\right) = (1+e)\,t, \qquad \text{所以} \qquad \tan\theta = \frac{(1+e)\tan\alpha}{1 - e + 2\tan^2\alpha}.$$

由于 $e < 1$，分母为正，所以 $\tan\theta > 0$，而 θ 的确是一个锐角偏转。

$\tan\theta$ 的最大值

当 α 取遍所有锐角时，$t = \tan\alpha$ 取遍 $(0, \infty)$ 中的每一个值。对于 $t > 0$，可以把分子和分母同除以 t：

$$\tan\theta = \frac{1+e}{\dfrac{1-e}{t} + 2t}.$$

想一想 不用微积分，怎样求这个式子的最大值?

尽量令分母最小。$(1-e)/t$ 和 $2t$ 都是正数，所以由算术－几何平均不等式（AM–GM inequality），

$$\frac{1-e}{t} + 2t \geq 2\sqrt{\frac{1-e}{t}\cdot 2t} = 2\sqrt{2(1-e)},$$

等号成立当且仅当 $(1-e)/t = 2t$，即 $\tan\alpha = \sqrt{(1-e)/2}$。这是一个真正的锐角，所以最小值确实能够达到。因此 $\tan\theta$ 的最大值为

$$\tan\theta_{\max} = \frac{1+e}{2\sqrt{2(1-e)}}.$$

（对 t 求导，会得到相同的驻点 $2t^2 = 1 - e$。）

验算

- 接近弹性的极限 $e \to 1$：两球交换沿连心线的分量，所以 P 只剩下 $u\sin\alpha$，并沿垂直于连心线的方向运动。于是 $\alpha + \theta = \frac{\pi}{2}$，而 $\tan\theta = \cot\alpha$。公式给出 $\tan\theta = 2t/(2t^2) = 1/t$，两者一致。最大值趋于无穷大，这是应有的结果，因为当 $\alpha \to 0$ 时 $\theta \to \frac{\pi}{2}$。
- 当 $e = \frac{1}{2}$ 时，最大值为 $\frac{3/2}{2\sqrt{1}} = \frac{3}{4}$，在 $\tan\alpha = \frac{1}{2}$（约 26.6°）时达到。以细小步长扫描 α，证实最大值为 0.75。用电脑模拟大量随机碰撞，亦重现了题目中全部四个结果。
- α 很小（近乎正面碰撞）：$\tan\theta \approx \frac{1+e}{1-e}\,\alpha \to 0$，所以正面碰撞不会造成偏转，与预期相符。

常见错误

- 把牛顿实验定律应用于整个速率，而不是沿连心线的分量。恢复（restitution）只作用于冲量的方向。
- 把 P 的新角度写成 $\alpha - \theta$。冲量减去了部分沿连心线的分量，所以 P 是转离该直线的。
- 忘记正是 $e < 1$ 令 $1 - e + 2\tan^2\alpha$ 为正，也忘记 $\tan\alpha$ 取遍整个 $(0, \infty)$，因此算术－几何平均不等式的等号情况确实能够达到。

STEP 之外

光滑球体的斜碰（oblique collision）是散射（scattering）最简单的例子。在这道题中，同样两条守恒定律分别沿一条直线及垂直于该直线应用，而这个想法可以推广到粒子物理和气体分子运动论（kinetic theory of gases）。对于等质量的弹性碰撞，结果就是著名的“碰撞后两速度互相垂直”。在质心参考系（centre-of-mass frame）中，每次碰撞都只是把相对速度旋转（在本题中还会把它缩短），这是理解上述所有结果的一个更简洁的方法。Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）正是从这个观点讨论碰撞的。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。