详细解答

STEP III 2019，第 1 题

纯数学 · 耦合微分方程

> **STEP III 2019，第 1 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2019 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

关键思路

当 $k = 1$ 时，方程组的右方正好是把 $x + \mathrm{i}y$ 乘以一个复数常数所得的结果，因此这对方程可以合并为关于 $z = x + \mathrm{i}y$ 的单一方程 $\dot{z} = cz$。这样一来，运动就变成旋转配合指数衰减（exponential decay）：一条螺线（spiral）。当 $k = 0$ 时，耦合只朝一个方向：x 不依赖 y，所以我们先解出 x，再把它代入 y 的方程。

解答

第 (i) 部分

当 $k = 1$ 时，我们有 $\dot{x} = -x - y$ 及 $\dot{y} = x - y$。设 $z = x + \mathrm{i}y$，则

$$\begin{aligned}\dot{z} = \dot{x} + \mathrm{i}\dot{y} &= (-x - y) + \mathrm{i}(x - y) \\ &= (-1 + \mathrm{i})(x + \mathrm{i}y) = (-1 + \mathrm{i})z,\end{aligned}$$

这可以通过展开 $(-1 + \mathrm{i})(x + \mathrm{i}y) = -x - \mathrm{i}y + \mathrm{i}x - y$ 来确认。由 $z(0) = 1$，解为

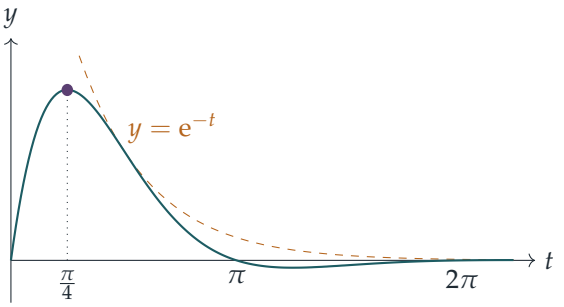
$$z = \mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})t} = \mathrm{e}^{-t}(\cos t + \mathrm{i}\sin t),$$

因此

$$x = \mathrm{e}^{-t}\cos t, \qquad y = \mathrm{e}^{-t}\sin t.$$

（如果你想避免使用复数（complex numbers）：把第一条方程微分，再消去 y，得到 $\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = 0$，其辅助方程（auxiliary equation）的根为 $-1 \pm \mathrm{i}$，然后利用 $x(0) = 1$、$\dot{x}(0) = -1$。）

y 对 t 的图像。这是一条位于包络线（envelope）$\pm e^{-t}$ 之内的正弦波，所以是一个阻尼振荡（damped oscillation）。它在 $t = n\pi$ 处为零，而其转向点（turning point）位于 $\dot{y} = x - y = e^{-t}(\cos t - \sin t) = 0$ 之处，即 $t = \frac{\pi}{4} + n\pi$。每个相继的峰值都缩小 $e^{-\pi} \approx 0.04$ 倍，因此在第一个隆起之后，若按真实比例绘画，振荡几乎看不见。



路径。以极式表示，$z = e^{-t}e^{it}$ 的模（modulus）为 $r = e^{-t}$，辐角（argument）为 $\theta = t$。因此路径是螺线

$$r = e^{-\theta}, \qquad \theta \geq 0,$$

从 $(1,0)$ 出发，以逆时针方向卷向原点，只有在 $t \to \infty$ 时才到达原点。起始时 $\dot{x} = -1$ 及 $\dot{y} = 1$，所以它离开 $(1,0)$ 时向左上方移动。每转一圈，与原点的距离便缩小 $e^{-2\pi} \approx 0.002$ 倍，因此按真实比例绘画时只看得见第一圈。

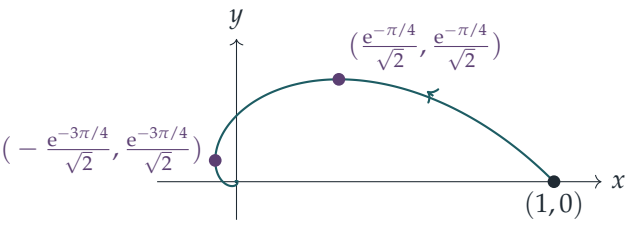
y 的最大值。y 的转向点位于 $t = \frac{\pi}{4} + n\pi$。在 $t = \frac{\pi}{4}$ 时，$y = e^{-\pi/4}/\sqrt{2} > 0$。对所有 $t \geq \frac{\pi}{2}$，我们有 $y \leq e^{-t} \leq e^{-\pi/2}$，而 $e^{-\pi/2} < e^{-\pi/4}/\sqrt{2}$，因为这等价于 $\sqrt{2} < e^{\pi/4} \approx 2.19$。在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上唯一的转向点是 $t = \frac{\pi}{4}$。所以 y 的最大值出现在

$$\left(\frac{e^{-\pi/4}}{\sqrt{2}}, \frac{e^{-\pi/4}}{\sqrt{2}}\right) \approx (0.322,\ 0.322).$$

x 的最小值。现在 $\dot{x} = -x - y = -e^{-t}(\cos t + \sin t)$，它在 $\tan t = -1$ 时为零，即 $t = \frac{3\pi}{4} + n\pi$。要使 $x < 0$，需要 $\cos t < 0$，这就选出 $t = \frac{3\pi}{4} + 2n\pi$，得 $x = -e^{-t}/\sqrt{2}$；由于 e^{-t} 是递减的，所以在这些 t 中取最小者时 x 最负，即 $t = \frac{3\pi}{4}$。（最小值必定出现在其中一个转向点，因为 $x(0) = 1 > 0$，而且当 $t \to \infty$ 时 $x \to 0$。）所以 x 的最小值出现在

$$\left(-\frac{e^{-3\pi/4}}{\sqrt{2}}, \frac{e^{-3\pi/4}}{\sqrt{2}}\right) \approx (-0.067,\ 0.067).$$

两点都位于直线 $y = \pm x$ 上，这正如预期：在螺线上，y 在路径朝 x 方向前进之处取最大值，而 x 在路径朝 y 方向前进之处取最小值。



第 (ii) 部分

当 $k=0$ 时，第一条方程单独就是 $\dot{x}=-x$，所以由 $x(0)=1$，

$$x=\mathrm{e}^{-t}.$$

于是 $\dot{y}+y=\mathrm{e}^{-t}$。乘以积分因子 (integrating factor) e^{t}，得 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(y\mathrm{e}^{t})=1$，所以 $y\mathrm{e}^{t}=t+c$，再由 $y(0)=0$ 得 $c=0$：

$$y=t\mathrm{e}^{-t}.$$

? **想一想** 怎样把它化为路径的方程?

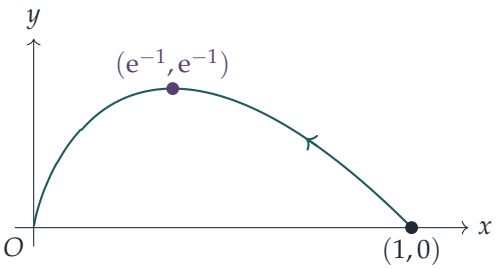
消去 t：由于 $x=\mathrm{e}^{-t}$，我们有 $t=-\ln x$，因此

$$y=-x\ln x,\qquad 0<x\leq 1.$$

当 t 由 0 增至 ∞ 时，x 由 1 递减趋向 0，所以质点从 $(1,0)$ 出发，沿这条曲线向左移动，当 $t\to\infty$ 时趋近原点。

绘图要点：

- $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\ln x-1$，在 $x=\mathrm{e}^{-1}$ 时为零。所以最高点是 $(\mathrm{e}^{-1},\mathrm{e}^{-1})$，在 $t=1$ 时到达。
- 在 $(1,0)$ 处斜率为 -1，与 $t=0$ 时的 $\dot{x}=-1$、$\dot{y}=1$ 吻合。
- 当 $x\to 0^{+}$ 时，$x\ln x\to 0$，所以 $y\to 0$；但斜率 $-\ln x-1\to+\infty$，所以曲线进入原点时与 y 轴相切。
- 对 $0<x<1$ 有 $y>0$，所以整条路径都在 x 轴之上。



留意与第 (i) 部分的对比：当 $k = 0$ 时不再有任何旋转，所以质点从不穿越坐标轴，只是沿曲线弯入原点。

验算

- 代回原方程：对于 $x = \mathrm{e}^{-t}\cos t$，$\dot{x} = -\mathrm{e}^{-t}\cos t - \mathrm{e}^{-t}\sin t = -x - y$，符合要求；$\dot{y}$ 的验算方法相同。两组解亦都满足 $x(0) = 1$、$y(0) = 0$。
- 以细小时间步长对方程作数值推进，可重现两组解，并确认在第 (i) 部分中 y 的最大值约为 0.3224，出现在 $t \approx 0.785$；x 的最小值约为 -0.0670，出现在 $t \approx 2.356$；而在第 (ii) 部分中 y 在 $t = 1$ 时达到峰值 $1/\mathrm{e} \approx 0.3679$。
- 对 (ii) 的合理性检查：$y = t\mathrm{e}^{-t}$ 是熟悉的“重根”形式，这是合理的，因为该方程组的矩阵有重特征值（repeated eigenvalue）-1。

常见错误

- 把 x 的最小值取在 $t = -\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{7\pi}{4}$：那里同样有 $\dot{x} = 0$，但那里 $x > 0$（是局部极大值）。要检查 $\cos t$ 的正负号。
- 忘记螺线只有在 $t \to \infty$ 时才到达原点，或把它画成顺时针卷入：$\theta = t$ 递增，所以它是逆时针卷入的。
- 在 (ii) 中漏掉原点处的铅垂切线：$y \to 0$ 但 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x \to \infty$。

STEP 之外

任何线性方程组（linear system）$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ 的行为都由 A 的特征值决定。这里 $A = \begin{pmatrix} -1 & -k \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 的特征值是 $-1 \pm \sqrt{-k}$：当 $k = 1$ 时它们是一对复数 $-1 \pm \mathrm{i}$，给出稳定螺旋点（stable spiral）；当 $k = 0$ 时有重特征值 -1，给出退化结点（degenerate node）；而当 $k < 0$ 时则会得到两个实特征值。以这种方法对不动点（fixed point）分类（即相平面分析（phase-plane analysis））是大学一年级的核心课题。Boyce 和 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）对此有详细讲解，并附有大量图像。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。