详细解答

STEP II 2019，第 9 题

力学 • 抛体与原点的距离

STEP II 2019，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2019 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

本题在 *Beyond STEP* 第 11.10 节会朝你飞回来的球中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch11/coming-back.html

关键思路

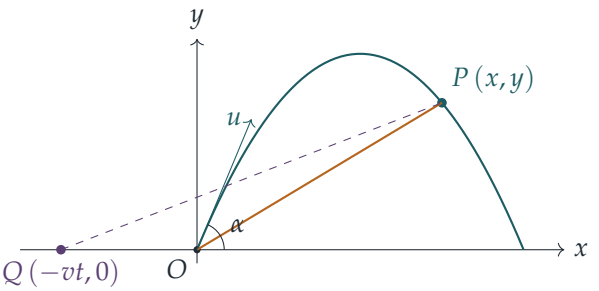
距离本身不易求导，但距离的平方却很容易：OP 递增，当且仅当 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(OP^2) > 0$。对 $x^2 + y^2$ 求导（differentiate），会得到 t 乘以一个关于 t 的二次式，于是整道题就变成“这个二次式何时为正?”，而这可由它的判别式（discriminant）回答。第 (ii) 部分是同一个计算，只是在水平距离上加入 Q 的运动。

解答

把 P 和 Q 视为质点（particle），忽略空气阻力，并以 O 为原点，x 轴取水平方向（沿 P 的运动方向），y 轴取铅直向上。记 $s = \sin\alpha$ 及 $c = \cos\alpha$，由于 $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$，两者皆为正。在时间 t，

$$x = uct, \qquad y = ust - \tfrac{1}{2}gt^2,$$

而当 $y = 0$ 再次成立时 P 落地，时间为 $T = \dfrac{2us}{g}$。



第 (i) 部分

设 $r = OP$，则 $r^2 = x^2 + y^2$；利用 $\dot{x} = uc$ 及 $\dot{y} = us - gt$，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\right) = 2(x\dot{x} + y\dot{y}) &= 2\left[u^2c^2t + \left(ust - \tfrac{1}{2}gt^2\right)(us - gt)\right] \\ &= 2t\left[u^2c^2 + u^2s^2 - \tfrac{3}{2}usgt + \tfrac{1}{2}g^2t^2\right] \\ &= t\left(g^2t^2 - 3usg\,t + 2u^2\right),\end{aligned}$$

这里用了 $c^2 + s^2 = 1$。由于飞行期间 $r > 0$，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2) = 2r\dot{r}$ 与 $\dot{r}$ 同号；又由于 $t > 0$，其符号与下式相同：

$$f(t) = g^2t^2 - 3usg\,t + 2u^2.$$

这个二次式的首项系数为正，判别式为

$$9u^2s^2g^2 - 8u^2g^2 = u^2g^2\left(9s^2 - 8\right).$$

若 $s < \frac{2\sqrt{2}}{3}$，则 $9s^2 < 8$（因为 $s > 0$），故判别式为负，对所有 t 皆有 $f(t) > 0$。因此在整个飞行过程中 $\dot{r} > 0$：OP 递增。

若 $s > \frac{2\sqrt{2}}{3}$，则判别式为正，f 有两个相异的根

$$t_{1,2} = \frac{u\left(3s \mp \sqrt{9s^2 - 8}\right)}{2g},$$

且当 $t_1 < t < t_2$ 时 $f(t) < 0$。两根皆为正（它们的和 $3us/g$ 与积 $2u^2/g^2$ 皆为正）。我们必须检查这段区间确实出现在 P 仍在空中的时候。

? **想一想** 这个二次式在某处变为负值，但我们怎样知道这发生在 P 落地之前？

计算 f 在落地时刻的值：

$$f(T) = g^2 \cdot \frac{4u^2s^2}{g^2} - 3usg \cdot \frac{2us}{g} + 2u^2 = 2u^2(1 - s^2) = 2u^2c^2 > 0.$$

所以 T 不在两根之间。但 f 的顶点位于 $t = \frac{3us}{2g} < \frac{2us}{g} = T$，所以 T 在顶点右方；既然它不在 $[t_1, t_2]$ 之内，就必然有 $T > t_2$。因此 $0 < t_1 < t_2 < T$，而当 $t_1 < t < t_2$ 时 $\dot{r} < 0$：OP 在 P 落地前的某段时间递减，得证。

第 (ii) 部分

Q 在光滑地面上以恒定速率 v 朝远离 P 那一侧的方向滑行，所以在时间 t 它位于 $(-vt, 0)$。P 与 Q 的水平距离为 $x + vt = wt$，其中

$$w = uc + v > 0,$$

而铅直距离为 y。所以 $QP^2 = w^2t^2 + y^2$，与之前完全一样，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(QP^2\right) &= 2\left[w^2t + \left(ust - \tfrac{1}{2}gt^2\right)(us - gt)\right] \\ &= t\left(g^2t^2 - 3usg\,t + 2w^2 + 2u^2s^2\right).\end{aligned}$$

飞行期间其符号与 $h(t) = g^2t^2 - 3usg\,t + 2(w^2 + u^2s^2)$ 相同，而 h 的判别式为

$$9u^2s^2g^2 - 8g^2\left(w^2 + u^2s^2\right) = g^2\left(u^2s^2 - 8w^2\right).$$

这个判别式为负，当且仅当 $8w^2 > u^2s^2$，即（由于 w 和 us 皆为正）$2\sqrt{2}\,w > us$。代入 $w = uc + v$，

$$2\sqrt{2}\,(uc + v) > us \iff 2\sqrt{2}\,v > \left(\sin\alpha - 2\sqrt{2}\cos\alpha\right)u.$$

所以在题设条件下，对所有 t 皆有 $h(t) > 0$，因此当 $t > 0$ 时 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(QP^2) > 0$，$QP$ 在 P 的整个飞行过程中递增，得证。

与第 (i) 部分相同的论证（现在 $h(T) = 2w^2 > 0$）显示，当不等式严格反转时，QP 确实会在 P 落地前递减一段时间，所以除了等号成立的边界情况外，这个条件其实也是必要条件。

验算

- 在第 (ii) 部分中令 $v = 0$，得 $2\sqrt{2}\cos\alpha > \sin\alpha$，即 $\tan\alpha < 2\sqrt{2}$，即 $\sin\alpha < \frac{2\sqrt{2}}{3}$：正是第 (i) 部分的结果，理应如此，因为此时 Q 一直停在 O。
- 临界角为 $\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 70.5°$，与 u 和 g 无关，这正是量纲分析（dimensional analysis）所要求的（唯一可用的无量纲量是 α）。
- 取 $u = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$、$g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ 及 $\sin\alpha = 0.97$，两根为 $t_1 \approx 1.14\,\mathrm{s}$ 和 $t_2 \approx 1.83\,\mathrm{s}$，都在落地时刻 $T \approx 1.98\,\mathrm{s}$ 之前。用电脑逐步模拟整个飞行过程，证实 OP 在这两个时刻之间减少；而且在大量随机的 u、α、v 之下，距离 QP 递增恰好与第 (ii) 部分的不等式成立相吻合。

常见错误

- 在第 (i) 部分只停留于“判别式为正”：你必须证明 OP 的下降发生在 P 落地之前，而不是之后。
- 把 Q 放在 $(vt, 0)$：Q 是朝远离 P 那一侧移动，所以它与 P 的水平距离是 $uct + vt$。
- 漏掉因子 t，或者约去它时没有指出 $t > 0$。

STEP 之外

研究 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\mathbf{r}|^2 = 2\,\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}}$ 的符号，是判断物体正在接近还是远离的标准方法；它在轨道力学（orbital mechanics）和两物体的相对运动（relative motion）中一再出现，而第 (ii) 部分其实就是关于 P 相对于 Q 的位置的问题。一个抛射体若以比约 70.5° 更陡的角度抛出，在飞行的一段时间内会朝抛掷者回来——这个巧妙的事实是力学教科书的热门例子。想了解更多，可参阅 Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。