详细解答

STEP II 2019，第 8 题

纯数学 · 矩阵的积性函数

STEP II 2019，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2019 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

本题在 *Beyond STEP* 第 7.3 节甚么才算行列式中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch07/determinant-axioms.html

关键思路

一切都源于单一法则 $\mathrm{f}(\mathbf{MN}) = \mathrm{f}(\mathbf{M})\mathrm{f}(\mathbf{N})$，只要把它套用到精心挑选的乘积上即可。每次的窍门都是找出同一个矩阵的两种不同写法，或者找出一个等于它自身与另一矩阵之乘积的矩阵，然后比较 f 的值。行列式（determinant）正是这样的一个函数，所以它能帮助我们预料答案应该是甚么；但我们绝不能假设 f 就是行列式。

解答

第 (i) 部分

由于 $\mathbf{MI} = \mathbf{M}$，

$$\mathrm{f}(\mathbf{M}) = \mathrm{f}(\mathbf{MI}) = \mathrm{f}(\mathbf{M})\,\mathrm{f}(\mathbf{I}).$$

题目给出 $\mathrm{f}(\mathbf{M}) \neq 0$，因此可以两边同除以它，得 $\mathrm{f}(\mathbf{I}) = 1$。

（若没有这个假设，便无法得出此结论：恒等于零的函数同样是可乘的（multiplicative）。）

第 (ii) 部分

直接相乘可得 $\mathbf{J}^2 = \mathbf{I}$，因此

$$\mathrm{f}(\mathbf{J})^2 = \mathrm{f}(\mathbf{J}^2) = \mathrm{f}(\mathbf{I}) = 1.$$

故此 $\mathrm{f}(\mathbf{J}) = \pm 1$；又因为 $\mathrm{f}(\mathbf{J}) \neq 1$，所以 $\mathrm{f}(\mathbf{J}) = -1$。

> **想一想** 乘以 **J** 对一个矩阵有甚么作用?

左乘 **J** 会交换两行（rows）；右乘则会交换两列（columns）：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}.$$

对两式分别取 f，并利用 $\mathrm{f}(\mathbf{J}) = -1$，得

$$\mathrm{f}\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} = -\mathrm{f}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{f}\begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} = -\mathrm{f}\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}.$$

第一式给出 $\mathrm{f}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = -\mathrm{f}\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$；把第二式乘以 -1，便知道这也等于 $\mathrm{f}\begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$，正如所求。

第 (iii) 部分

设 **A** 的第一行为 $(a\ \ b)$，第二行为它的 λ 倍。设 **B** 为两行相同的矩阵，并在 **K** 中取 $k = \lambda$。左乘 **K** 会把第二行乘以 k，因此

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ \lambda a & \lambda b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} = \mathbf{KB}.$$

交换 **B** 的两行后矩阵保持不变，所以由第 (ii) 部分（取 $c = a$、$d = b$）得

$$\mathrm{f}(\mathbf{B}) = -\mathrm{f}(\mathbf{B}),$$

这迫使 $\mathrm{f}(\mathbf{B}) = 0$。因此 $\mathrm{f}(\mathbf{A}) = \mathrm{f}(\mathbf{K})\,\mathrm{f}(\mathbf{B}) = 0$。这对每个实数 λ 都成立，包括 $\lambda = 0$。

第 (iv) 部分

首先计算这三个矩阵。当 $k \neq 0$ 时，$\mathbf{K}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/k \end{pmatrix}$，而且

$$\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{K}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

接着，以 **K** 作共轭（conjugation）不会改变 f 的值。事实上 $\mathrm{f}(\mathbf{K}^{-1})\mathrm{f}(\mathbf{K}) = \mathrm{f}(\mathbf{K}^{-1}\mathbf{K}) = \mathrm{f}(\mathbf{I}) = 1$，所以

$$\mathrm{f}(\mathbf{K}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{K}) = \mathrm{f}(\mathbf{K}^{-1})\,\mathrm{f}(\mathbf{P})\,\mathrm{f}(\mathbf{K}) = \mathrm{f}(\mathbf{P}).$$

想一想 k 取哪些值时，$\mathbf{K}^{-1}\mathbf{PK}$ 会变成 $\mathbf{P}^2$ 和 $\mathbf{P}^{-1}$?

取 $k=2$ 得 $\mathbf{K}^{-1}\mathbf{PK}=\mathbf{P}^2$，所以

$$\mathrm{f}(\mathbf{P})=\mathrm{f}(\mathbf{P}^2)=\mathrm{f}(\mathbf{P})^2,$$

因此 $\mathrm{f}(\mathbf{P})=0$ 或 1。

取 $k=-1$ 得 $\mathbf{K}^{-1}\mathbf{PK}=\mathbf{P}^{-1}$，所以 $\mathrm{f}(\mathbf{P}^{-1})=\mathrm{f}(\mathbf{P})$。但 $\mathrm{f}(\mathbf{P})\,\mathrm{f}(\mathbf{P}^{-1})=\mathrm{f}(\mathbf{I})=1$，所以

$$\mathrm{f}(\mathbf{P})^2=1,$$

特别地 $\mathrm{f}(\mathbf{P})\neq 0$。综合两个结果，

$$\mathrm{f}(\mathbf{P})=1.$$

验算

行列式满足所有假设：它是可乘的，$\det\mathbf{I}=1$ 而且 $\det\mathbf{J}=-1$。它亦与我们的所有结论吻合：交换两行或两列会改变其正负号，两行成比例的矩阵的行列式为 0，以及 $\det\mathbf{P}=1$。一个较不明显的例子是 $\mathrm{f}(\mathbf{M})=\operatorname{sgn}(\det\mathbf{M})\,|\det\mathbf{M}|^{0.7}$。我们用电脑对数以千计的随机矩阵作检验，证实这两个函数都满足可乘法则、行与列的交换恒等式、两行成比例时 $\mathrm{f}(\mathbf{A})=0$，以及 $\mathrm{f}(\mathbf{P})=1$。

常见错误

- 假设 $\mathrm{f}=\det$。题目要求你单凭可乘性推导出这些性质；行列式只是一个参考。
- 未加解释便使用 $\mathrm{f}(\mathbf{K}^{-1})=1/\mathrm{f}(\mathbf{K})$。这需要第 (i) 部分的 $\mathrm{f}(\mathbf{I})=1$，以及 $k\neq 0$，使 $\mathbf{K}$ 可逆。
- 停在 $\mathrm{f}(\mathbf{P})^2=\mathrm{f}(\mathbf{P})$，忘记排除 $\mathrm{f}(\mathbf{P})=0$ 的情况。

STEP 之外

像 f 这样保持乘法的映射，是从 2×2 可逆矩阵所成的群（group）到非零实数的一个同态（homomorphism）。第 (iv) 部分是一个经典论证的开端：像 $\mathbf{P}$ 这样的错切矩阵（shear matrix）都是交换子（commutator）的乘积，所以每个这样的同态都把它们映射到 1，最终 f 只取决于行列式。你亦可以证明：行列式是唯一一个对每一行都是线性的、交错的（alternating），并且在 $\mathbf{I}$ 处等于 1 的函数。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《线性代数导论》）正是从这类性质出发建构行列式，而 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《环、域与群》）则涵盖同态的内容。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。