详细解答

STEP II 2019，第 7 题

纯数学 · 向量与纯量积

> **STEP II 2019，第 7 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2019 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

关键思路

对于单位向量(unit vector),长度和角度都可以由标量积(scalar product)得出:$|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2 = 2-2\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$。因此诀窍是把“总和为零”这个条件拆开，一些向量放在一边，其余放在另一边，然后计算两边长度的平方。这样便把向量方程转化为标量积之间的等式，而这些等式就能告诉我们图形的形状。

解答

以下我们会一直用到这个事实：对于单位向量 $\mathbf{u}$、$\mathbf{v}$,

$$|\mathbf{u}\pm\mathbf{v}|^2 = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}\pm 2\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = 2\pm 2\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}.$$

第 (i) 部分

由于 $\mathbf{a}+\mathbf{b}=-\mathbf{c}$，两边取长度的平方，得

$$2+2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{c}|^2 = 1,$$

所以 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = -\frac{1}{2}$，得证。

这个条件对 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$ 是对称的，所以用同样的方法（写成 $\mathbf{b}+\mathbf{c}=-\mathbf{a}$ 及 $\mathbf{c}+\mathbf{a}=-\mathbf{b}$），可得 $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = \mathbf{c}\cdot\mathbf{a} = -\frac{1}{2}$。因此

$$AB^2 = |\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2 = 2-2\left(-\tfrac{1}{2}\right) = 3,$$

同理 $BC^2 = CA^2 = 3$。三条边的长度都是 $\sqrt{3}$,所以**三角形** ABC **是等边三角形(equilateral triangle)**。(每对位置向量(position vector)之间的夹角都是 $120°$,而由于 $\frac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{0}$, O 既是三角形的外心（circumcentre），也是它的形心（centroid）。)

第 (ii) 部分

把条件写成 $\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2=-(\mathbf{a}_3+\mathbf{a}_4)$，两边取长度的平方：

$$2+2\,\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_2=2+2\,\mathbf{a}_3\cdot\mathbf{a}_4 \quad\Longrightarrow\quad \mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_2=\mathbf{a}_3\cdot\mathbf{a}_4.$$

以另外两种可能的方式把向量分组，同样可得

$$\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_3=\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{a}_4, \qquad \mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_4=\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{a}_3.$$

由于 $A_iA_j^2=2-2\,\mathbf{a}_i\cdot\mathbf{a}_j$，这表示对棱相等：$A_1A_2=A_3A_4$、$A_1A_3=A_2A_4$ 及 $A_1A_4=A_2A_3$。

(a) 四点共面

? **想一想** 四点所在的平面是否一定经过原点?

是的。四点的形心是 $\frac{1}{4}(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3+\mathbf{a}_4)=\mathbf{0}$，而平面上各点的形心必定在该平面上。所以该平面包含 O；又由于每个 A_i 与 O 的距离都是 1，四点都在该平面上以 O 为圆心、半径为 1 的圆上。以下我们都在这个平面上讨论。

设 $\mathbf{w}=\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2$，于是 $\mathbf{a}_3+\mathbf{a}_4=-\mathbf{w}$。

若 $\mathbf{w}=\mathbf{0}$，则 $\mathbf{a}_2=-\mathbf{a}_1$ 及 $\mathbf{a}_4=-\mathbf{a}_3$。

若 $\mathbf{w}\neq\mathbf{0}$，把 $\mathbf{a}_3$ 与 $\mathbf{a}_3+\mathbf{a}_4=-\mathbf{w}$ 取点积，并利用 (ii) 的结果：

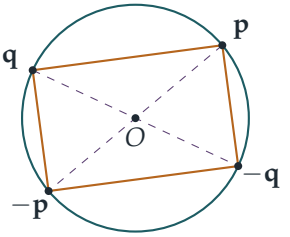
$$\mathbf{a}_3\cdot\mathbf{w}=-(1+\mathbf{a}_3\cdot\mathbf{a}_4)=-(1+\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_2)=-\tfrac{1}{2}|\mathbf{w}|^2.$$

所以 $\mathbf{a}_3$ 是一个沿 $\mathbf{w}$ 方向分量固定的单位向量：它的端点落在一条垂直于 $\mathbf{w}$ 的固定直线上，而一条直线与一个圆最多相交于两点。现在 $-\mathbf{a}_1$ 和 $-\mathbf{a}_2$ 正是两个这样的向量，因为

$$(-\mathbf{a}_1)\cdot\mathbf{w}=-(1+\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_2)=-\tfrac{1}{2}|\mathbf{w}|^2,$$

$-\mathbf{a}_2$ 亦同理；又因 $A_1\neq A_2$，两者并不相同。因此 $\mathbf{a}_3=-\mathbf{a}_1$ 或 $\mathbf{a}_3=-\mathbf{a}_2$，而 $\mathbf{a}_4=-\mathbf{w}-\mathbf{a}_3$ 就是另一个。

在所有情况下，四个位置向量都是 $\mathbf{p},-\mathbf{p},\mathbf{q},-\mathbf{q}$，其中 $\mathbf{q}\neq\pm\mathbf{p}$ 为某两个单位向量。所以四点是圆上两条直径（diameter）的端点。它们组成的四边形的对角线（diagonal）互相平分（于 O），所以它是平行四边形（parallelogram）；而且对角线相等（长度都是 2），所以它是**长方形（rectangle）**。当且仅当两条直径互相垂直时，它是正方形。



（严格来说，顶点应按圆周上的次序排列。若标记刚好是 $A_1 = \mathbf{p}$、$A_2 = \mathbf{q}$、$A_3 = -\mathbf{q}$、$A_4 = -\mathbf{p}$，按此次序连接各点，画出的会是这个长方形的两条边和两条对角线。）

(b) 正四面体 现在全部六条棱 A_iA_j 都相等，所以全部六个标量积 $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j$（$i \neq j$）取同一个值，设为 k。把 $\mathbf{a}_1$ 与零和取点积：

$$0 = \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4) = 1 + 3k,$$

所以 $k = -\frac{1}{3}$。于是每条棱都有

$$A_1A_2^2 = 2 - 2k = 2 + \tfrac{2}{3} = \tfrac{8}{3}, \qquad \text{所以边长为} \qquad \sqrt{\tfrac{8}{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

验算

- 以 $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$、$\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1)$、$\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,-1)$、$\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,-1,1)$ 为顶点的四面体是正四面体（regular tetrahedron），其位置向量都是单位向量且总和为 $\mathbf{0}$，棱长为 $\frac{1}{\sqrt{3}}|(0,2,2)| = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \approx 1.633$。
- 与 (i) 比较：三个夹角为 120° 的单位向量给出边长 $\sqrt{3} \approx 1.732$，稍长一点。这是合理的，因为正四面体的顶点在球面上“更挤迫”。
- 用电脑对数千组随机的、总和为零的四个单位向量进行验算，证实了 (ii) 中三条标量积等式全部成立，而且在共面的情况下，各点总是以相反的成对形式 $\pm\mathbf{p}$、$\pm\mathbf{q}$ 出现。

常见错误

- 在 (i) 中，得出 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -\frac{1}{2}$ 便停下来：必须求出全部三个标量积（或全部三条边长），才可断定三角形是等边三角形。
- 在 (a) 中，只凭对边相等便断定是“平行四边形”，而没有检查顶点的排列方式；或忘记证明该平面经过 O。

STEP 之外

一组总和为零、且两两标量积都相等的单位向量，正是*正单形*（*regular simplex*）的顶点：在 n 维空间中共有 $n+1$ 个这样的向量，且 $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = -\frac{1}{n}$，这就给出了上面的 $-\frac{1}{2}$ 和 $-\frac{1}{3}$。这类构型见于化学（甲烷的键角 109.5° 就是 $\cos^{-1}(-\frac{1}{3})$）以及编码理论（coding theory）。由所有标量积 $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j$ 组成的矩阵称为 *Gram 矩阵*（*Gram matrix*），它在不计旋转的意义下决定了一组向量的构型，而这正是整道题背后的想法。想深入了解，可参阅 Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《线性代数导论》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。