详细解答

STEP II 2019，第 6 题

纯数学 · 一阶微分方程

STEP II 2019，第 6 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2019 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

关键思路

两条方程的右方都只通过一个组合依赖 x 和 y：第 (i) 部分是 $y+x$，第 (ii) 部分是 $y-x$，因为那个二次式其实就是 $(y-x)^2+4(y-x)+3$。单凭这一个观察，就能找出直线解，把驻点（stationary point）限制在某些直线上，并且（在第 (i) 部分）把方程化成可以分离变量（separation of variables）的形式。之后，题目中关于解曲线（solution curve）永不相交的提示就能完成余下的工作：一条从两条直线解之间出发的曲线，会永远被困在两者之间。

解答

第 (i) 部分

直线解。若 $y=mx+c$，则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=m$，所以我们需要

$$m=mx+c+x+1=(m+1)x+(c+1)\quad \text{对所有}x.$$

比较 x 的系数得 $m=-1$，再比较常数项得 $c+1=m=-1$，所以 $c=-2$。这个解是 $y=-x-2$。

驻点在哪里。在 $y=y_3(x)$ 的驻点上，我们有 $0=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y+x+1$，所以该点位于直线 $y=-x-1$ 上。

现在假设 $k<-2$。曲线 $y=y_3(x)$ 和直线 $y=-x-2$ 都是解，而在 $x=0$ 时曲线位于直线下方（$k<-2$）。两者永不相遇，所以对每个 x，曲线都留在直线下方：$y_3(x)<-x-2<-x-1$。因此 $y_3(x)+x+1<-1<0$ 处处成立。斜率永不为零（事实上总是小于 -1），所以没有驻点。

每个驻点都是极小点。把方程求导，

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 1.$$

在驻点上一阶导数（derivative）为 0，所以二阶导数是 $1 > 0$，该点是局部极小点（local minimum）。

求解。设 $Y = y + x$，则 $\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 1 = Y + 2$。在直线 $Y = -2$ 上，这就是我们已有的解；否则便分离变量：

$$\int \frac{\mathrm{d}Y}{Y+2} = \int \mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad \ln|Y+2| = x + \text{常数} \quad \Longrightarrow \quad Y + 2 = Ae^x,$$

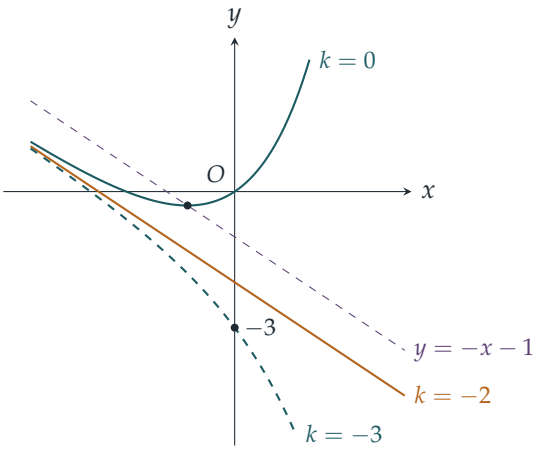
其中 A 是常数（而 $A = 0$ 对应那条直线）。所以 $y = Ae^x - x - 2$，由 $y(0) = k$ 得 $A = k + 2$：

$$y_3(x) = (k+2)e^x - x - 2.$$

这与我们之前的发现一致：$y_3'(x) = (k+2)e^x - 1$，当 $k \le -2$ 时永不为零；当 $k > -2$ 时，它在 $e^x = 1/(k+2)$ 处为零，且只有一次。

三条曲线。

- $k = 0$：$y = 2e^x - x - 2$，经过原点。极小点在 $e^x = \frac{1}{2}$ 处，即 $(-\ln 2,\ \ln 2 - 1) \approx (-0.69, -0.31)$，位于直线 $y = -x - 1$ 上。当 $x \to -\infty$ 时，$2e^x \to 0$，曲线从上方趋近 $y = -x - 2$；当 $x \to \infty$ 时，指数项占主导。
- $k = -2$：就是直线 $y = -x - 2$ 本身。
- $k = -3$：$y = -e^x - x - 2$，经过 $(0, -3)$，一直递减。当 $x \to -\infty$ 时，它从下方趋近 $y = -x - 2$；当 $x \to \infty$ 时，它像 $-e^x$ 一样急降。



第 (ii) 部分

改写右方。把各项归组，

$$x^2+y^2-2xy-4x+4y+3=(y-x)^2+4(y-x)+3=(y-x+1)(y-x+3).$$

不妨设 $u=y-x$，于是 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(u+1)(u+3)$。

直线解。若 $y=mx+c$，则 $u=(m-1)x+c$，我们需要

$$m=\big((m-1)x+c+1\big)\big((m-1)x+c+3\big)\quad\text{对所有}x.$$

若 $m\neq 1$，右方是一个真正的 x 的二次式，不可能等于常数，所以 $m=1$。于是 $1=(c+1)(c+3)$，即 $c^2+4c+2=0$，得 $c=-2\pm\sqrt{2}$。两个解是

$$y=x-2+\sqrt{2}\qquad\text{及}\qquad y=x-2-\sqrt{2}.$$

y_4 的驻点。斜率恰好在 $u=-1$ 或 $u=-3$ 时为零，所以任何驻点都位于

$$y=x-1\qquad\text{或}\qquad y=x-3.$$

在这两条直线之间，我们有 $-3<y-x<-1$，所以 $u+1<0<u+3$，斜率 $(u+1)(u+3)$ 是负的。（在两线之外，斜率是正的。）

曲线落在哪里。在 $x=0$ 时，$u=-2$，介乎 $-2-\sqrt{2}\approx-3.41$ 与 $-2+\sqrt{2}\approx-0.59$ 之间。所以在 $x=0$ 时，曲线位于两条直线解之间；又因为解曲线永不相交，

$$x-2-\sqrt{2}<y_4(x)<x-2+\sqrt{2}\quad\text{对所有}x.$$

由两条驻点直线所夹的带状区域（$-3<u<-1$）位于这条带状区域之内。

> ? **想一想** 曲线被困在两条平行线之间，但它在带状区域内会走向哪里？

追踪 $u=y_4-x$。它满足

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=(u+1)(u+3)-1=u^2+4u+2=\big(u+2-\sqrt{2}\big)\big(u+2+\sqrt{2}\big),$$

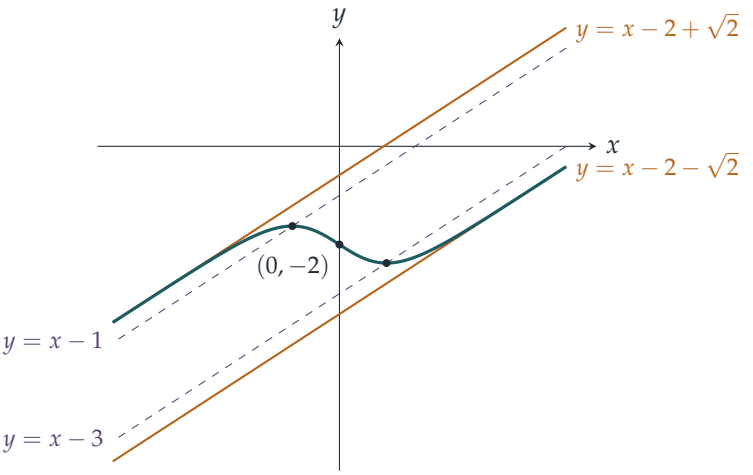
只要 $-2-\sqrt{2}<u<-2+\sqrt{2}$，这就是负数，而这一直成立。所以 u 严格递减且有界，因此当 $x\to\pm\infty$ 时有极限。在这样的极限处，$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ 必须趋于 0（否则 u 会无界地改变），所以极限就是那两个根：当 $x\to-\infty$ 时 $u\to-2+\sqrt{2}$，当 $x\to+\infty$ 时 $u\to-2-\sqrt{2}$。

所以，由左至右看：

- 在最左方，曲线从下方紧贴 $y=x-2+\sqrt{2}$，斜率接近 1；
- 当 u 下降穿过 -1 时，曲线与 $y=x-1$ 相交于唯一一点，这是一个局部极大点（斜率由正转负）；

- 它以斜率 $(-1)(1) = -1$ 向下穿过 $(0, -2)$；
- 当 u 下降穿过 -3 时，曲线与 $y = x - 3$ 相交于唯一一点，这是一个*局部极小点*；
- 之后它再次上升，从上方紧贴 $y = x - 2 - \sqrt{2}$，斜率趋于 1。

由于 u 严格递减，$u = -1$ 和 $u = -3$ 各自恰好只经过一次，所以恰好有两个驻点。还有一个漂亮的特点：把 (x, y) 换成 $(-x, -4 - y)$，方程和起点 $(0, -2)$ 都保持不变，所以曲线关于 $(0, -2)$ 有半周旋转对称（half-turn symmetry），而极大点和极小点互为关于该点的镜像。



验算

- 在第 (i) 部分代回原式：$y = (k+2)e^x - x - 2$ 给出 $y' = (k+2)e^x - 1$，而 $y + x + 1 = (k+2)e^x - 1$。设 $k = -2$ 便得回那条直线。
- 当 $k = 0$ 时，极小点 $(-\ln 2, \ln 2 - 1) \approx (-0.693, -0.307)$ 确实位于 $y = -x - 1$ 上。
- 在第 (ii) 部分，从 $(0, -2)$ 出发的逐步数值解（经电脑核实）一直留在两条直线之间，在 $y = x - 1$ 上约 $(-0.623, -1.623)$ 处达到极大，在 $y = x - 3$ 上约 $(0.623, -2.377)$ 处达到极小，到了 $x = \pm 6$ 时与渐近线（asymptote）的距离约在 10^{-7} 之内。这两点互为关于 $(0, -2)$ 的像，正如对称性所预测。

常见错误

- 忘记运用不相交的性质：“$k < -2$ 意味着没有驻点”需要曲线对*所有* x 都留在 $y = -x - 2$ 下方，而不只是在 $x = 0$ 时。

- 画 y_4 时让它穿过其中一条直线解，或把极大点和极小点的位置弄反。$(u+1)(u+3)$ 在两条虚线之间的正负号可以判定哪个是哪个。
- 在第 (ii) 部分求 m 和 c 时，未先排除（或确认）$m=1$ 便除以 $m-1$。

STEP 之外

题目开头的提示，就是皮卡－林德洛夫定理（Picard–Lindelöf theorem）中关于唯一性（uniqueness）的那一半：对于光滑的右方，每一点恰好有一个解经过，所以解曲线不能相交。第 (ii) 部分其实是一条乔装的自治（autonomous）方程 $u'=u^2+4u+2$；我们不用任何公式，只凭平衡点（equilibrium）以及 u' 在平衡点之间的正负号，就找出曲线的走向，这正是微分方程定性理论（qualitative theory of differential equations）的起点。Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）既涵盖唯一性，也涵盖这种相线（phase line）图像。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。