详细解答

STEP II 2019，第 5 题

纯数学 • 迭代的不动点

> **STEP II 2019，第 5 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2019 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

关键思路

常数数列（constant sequence）的首项是一个*不动点*（fixed point），即 $\mathrm{f}(x) = x$ 的解。周期（period）为 2 的数列，其首项是 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) = x$ 的一个解，而且不是不动点。每个不动点同时也是 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) = x$ 的解，所以 $\mathrm{f}(x) - x$ 必定是四次多项式（quartic）$\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) - x$ 的因式（factor）。只要求出另一个因式（它是一个二次式（quadratic）），一切便归结为判别式（discriminant）的问题。

解答

两部分通用的因式分解

在两部分中，$\mathrm{f}(x) = x^2 - px + c$，其中 c 为常数（在 (i) 中 $c = p$，在 (ii) 中 $c = q$）。对任意 x 和 y，

$$\mathrm{f}(y) - \mathrm{f}(x) = (y^2 - x^2) - p(y - x) = (y - x)(y + x - p).$$

令 $y = \mathrm{f}(x)$，再在两边加上 $\mathrm{f}(x) - x$，得

$$\begin{aligned}\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) - x &= [\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) - \mathrm{f}(x)] + [\mathrm{f}(x) - x] \\ &= (\mathrm{f}(x) - x)(\mathrm{f}(x) + x - p + 1).\end{aligned}$$

我们会用到以下两个推论：

- 数列的周期为 2，当且仅当 a 是 $Q(x) = \mathrm{f}(x) + x - p + 1$ 的根，而*不是* $\mathrm{f}(x) - x$ 的根。事实上，若 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(a)) = a$，则 $u_2 = u_0$；由于每一项都由前一项决定，以归纳法（induction）可知对所有 n 都有 $u_{n+2} = u_n$。此时数列不是常数数列，当且仅当 $u_1 \neq u_0$，即 $\mathrm{f}(a) \neq a$。

- 若 x 是不动点，则 $Q(x) = 2x - p + 1$。因此不动点要同时是 Q 的根，只可能是 $x = \frac{1}{2}(p-1)$。

第 (i) 部分

这里 $\mathrm{f}(x) = x^2 - px + p$，所以

$$\mathrm{f}(a) - a = a^2 - (p+1)a + p = (a-1)(a-p).$$

数列是常数数列，当且仅当 $u_1 = u_0$（此时每一项都等于 a），所以所求的值为

$$a = 1 \quad 及 \quad a = p.$$

至于周期 2，另一个因式是

$$Q(x) = x^2 - px + p + x - p + 1 = x^2 + (1-p)x + 1,$$

其判别式为

$$(1-p)^2 - 4 = (p-1-2)(p-1+2) = (p-3)(p+1).$$

- 若 $-1 < p < 3$，判别式为负，Q 没有实根，因此没有实数 a 能给出周期 2。
- 若 $p = 3$ 或 $p = -1$，Q 只有一个根 $x = \frac{1}{2}(p-1)$，分别为 1 或 -1。当 $p = 3$ 时，不动点是 1 和 3；当 $p = -1$ 时，不动点是 1 和 -1。两种情况下 Q 的根都是不动点，所以由此出发的数列是常数数列，而不是周期 2。
- 若 $p > 3$ 或 $p < -1$，Q 有两个相异实根。两者都不是不动点：根据上面第二点，若是不动点则必须等于 $\frac{1}{2}(p-1)$，但

  $$Q\left(\tfrac{1}{2}(p-1)\right) = \tfrac{1}{4}(p-1)^2 - \tfrac{1}{2}(p-1)^2 + 1 = 1 - \tfrac{1}{4}(p-1)^2 \neq 0$$

  因为 $(p-1)^2 > 4$。所以取 a 为任一个根，都得到周期为 2 的数列。

因此，存在能给出周期 2 的 a 值，当且仅当 $p > 3$ 或 $p < -1$。

第 (ii) 部分

现在 $\mathrm{f}(x) = x^2 - px + q$，所以

$$\mathrm{f}(x) - x = x^2 - (p+1)x + q.$$

常数数列需要某个 a 使 $\mathrm{f}(a) = a$，即这个二次式的一个实根。

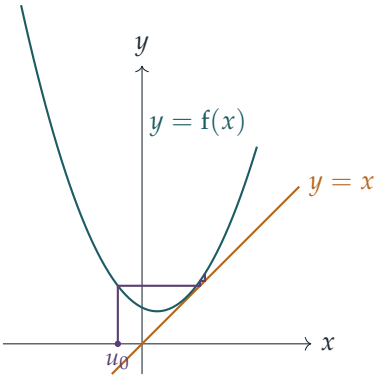
若对所有 x 都有 $\mathrm{f}(x) > x$，则对每个 a 都有 $\mathrm{f}(a) \neq a$，所以没有数列是常数数列。

反过来，假设没有 a 给出常数数列，即 $g(x) = x^2 - (p+1)x + q$ 没有实根。那么 g 是连续（continuous）的而且永不为零，所以它不会变号；又因为当 $x \to \infty$ 时 $g(x) \to +\infty$，它处处为正。（等价地说：判别式为负，而首项系数（leading coefficient）为正。）也就是说，对所有 x 都有 $\mathrm{f}(x) > x$，这便完成了“当且仅当”的证明。

推论。假设不存在常数数列。那么对所有 x 都有 $\mathrm{f}(x) > x$，所以对任何 a，

$$u_{n+1} = \mathrm{f}(u_n) > u_n \quad \text{对所有} n.$$

数列严格递增（strictly increasing），所以 $u_2 > u_1 > u_0$。特别地，$u_2 \neq u_0$，数列不可能有周期 2。



上图展示了这个情况：抛物线（parabola）完全位于 $y = x$ 之上，所以迭代（iterate）形成的“阶梯”只能不断向上攀升。

最后一部分。逆命题（converse）是错误的。取 $p = q = 0$，即 $\mathrm{f}(x) = x^2$。当 $a = 0$ 和 $a = 1$ 时，数列是常数数列。至于周期 2，我们需要 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(a)) = a^4 = a$，即 $a(a-1)(a^2+a+1) = 0$。因式 $a^2 + a + 1$ 的判别式为负，所以唯一的实数解是 $a = 0$ 和 $a = 1$，两者都是不动点。因此，虽然有些 a 值给出常数数列，却没有任何 a 值给出周期 2。

想一想 $\mathrm{f}(x) = x^2$ 只是碰巧成立吗?

不是。一般而言，不动点的二次方程的判别式为 $D = (p+1)^2 - 4q$，而 $Q(x) = x^2 + (1-p)x + q - p + 1$ 的判别式是

$$(1-p)^2 - 4(q-p+1) = (p+1)^2 - 4q - 4 = D - 4.$$

与 (i) 一样，Q 的根只有在 Q 的判别式为零时才会是不动点。所以当 $D \geq 0$ 时存在常数数列，当 $D > 4$ 时存在周期 2 的数列。任何满足 $0 \leq D \leq 4$ 的 p、q 都给出一个反例（counterexample）。

验算

- 在 (i) 中取 $p = 4$，$Q(x) = x^2 - 3x + 1$ 的根为 $\frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5}) \approx 2.618,\ 0.382$。从 2.618 出发，$\mathrm{f}(2.618) = 4 + (2.618 - 4)(2.618) \approx 0.382$，而 $\mathrm{f}(0.382) \approx 2.618$：周期为 2，与预测一致。
- 当 $p = 3$ 时，Q 的根是 $x = 1$，而 $\mathrm{f}(1) = 3 + (1 - 3) = 1$：这是不动点，证实边界值须被排除。
- 展开 $(x^2 - (p+1)x + p)(x^2 + (1-p)x + 1)$ 得 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) - x$；以电脑在数千组随机的 (p, x) 上检验，连同 (ii) 中“周期 2 当且仅当 $D > 4$”这个条件，均没有发现例外。

常见错误

- 把 $p = 3$ 和 $p = -1$ 也包括在内：此时 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(a)) = a$ 有重根，但它是不动点，所以数列是常数数列。
- 忘记在寻找周期 2 的点之前，必须先从 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) - x$ 中除去因式 $\mathrm{f}(x) - x$。
- 在最后一部分只凭不等式的方向来论证；要回答“是否成立...?”这类问题，一个明确的反例才是决定性的。

STEP 之外

这是踏入*离散动力系统*（discrete dynamical systems）的第一步。每一个二次映射，经过线性变量代换后，都等价于逻辑斯谛映射（logistic map）$x \mapsto rx(1-x)$。随着参数增大，不动点让位给 2-循环，然后是 4-循环，如此类推，形成一连串倍周期分岔（period-doubling cascade），最终进入混沌（chaos）。你所找到的临界值，即 Q 的判别式为零之处，正是这些分岔（bifurcation）中的第一个。Strogatz 的 *Nonlinear Dynamics and Chaos*（《非线性动力学与混沌》）是一本非常易读的入门书。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。