详细解答

STEP II 2019，第 4 题

纯数学 · 三角函数裂项相消乘积

STEP II 2019，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2019 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

关键思路

若一串余弦的乘积中，角度每次加倍（或减半），只要乘以最小角的正弦，乘积便会伸缩相消（telescopes）：二倍角公式（double-angle formula）$2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$ 会把因子逐一“吞掉”。乘积一旦化为闭合形式（closed form），取对数（logarithm）便把它变成和，再求导便把 $\ln\cos$ 变成 $\tan$：正切之和正是由此而来。无穷的版本则可令 $n \to \infty$，并利用两个标准极限得出。

解答

第 (i) 部分

把该乘积记为 P。由于 $\sin\frac{\pi}{9} \neq 0$，我们可以乘以它，并把恒等式使用三次：

$$8\sin\tfrac{\pi}{9}\,P = 4(2\sin\tfrac{\pi}{9}\cos\tfrac{\pi}{9})\cos\tfrac{2\pi}{9}\cos\tfrac{4\pi}{9} = 2(2\sin\tfrac{2\pi}{9}\cos\tfrac{2\pi}{9})\cos\tfrac{4\pi}{9}$$
$$= 2\sin\tfrac{4\pi}{9}\cos\tfrac{4\pi}{9} = \sin\tfrac{8\pi}{9} = \sin(\pi - \tfrac{\pi}{9}) = \sin\tfrac{\pi}{9}.$$

两边除以 $8\sin\frac{\pi}{9}$，得

$$\cos\tfrac{\pi}{9}\cos\tfrac{2\pi}{9}\cos\tfrac{4\pi}{9} = \frac{1}{8}.$$

第 (ii) 部分

这里的角 $x, \frac{x}{2}, \ldots, \frac{x}{2^n}$ 逐次减半，所以最小的是 $x/2^n$。由于 $0 < x/2^n < \frac{1}{2}\pi$，它的正弦不为零。乘以 $\sin(x/2^n)$ 后，因子 $\cos(x/2^n)$ 与它配对，得出 $\frac{1}{2}\sin(x/2^{n-1})$；这又与

$\cos(x/2^{n-1})$ 配对，如此类推，直至 $\cos x$。这 $n+1$ 步每一步都贡献一个因子 $\frac{1}{2}$：

$$\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)\prod_{k=0}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)=\frac{1}{2^{n+1}}\sin 2x,\qquad \text{所以}\qquad \prod_{k=0}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)=\frac{\sin 2x}{2^{n+1}\sin(x/2^n)}.$$

想一想 求导怎样能把余弦的乘积变成正切的和?

取对数。每个因子都是正数，因为对每个 k 都有 $0<x/2^k<\frac{1}{2}\pi$，而且 $\sin 2x>0$。因此

$$\sum_{k=0}^{n}\ln\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)=\ln\sin 2x-(n+1)\ln 2-\ln\sin\left(\frac{x}{2^n}\right).$$

对 x 求导，并由连锁法则（chain rule）得 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\cos(x/2^k)=-\frac{1}{2^k}\tan(x/2^k)$：

$$-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\left(\frac{x}{2^k}\right)=2\cot 2x-\frac{1}{2^n}\cot\left(\frac{x}{2^n}\right).$$

乘以 -1，正好得出所求结果：

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\left(\frac{x}{2^k}\right)=\frac{1}{2^n}\cot\left(\frac{x}{2^n}\right)-2\cot 2x.$$

第 (iii) 部分

把乘积公式除以 $\cos x\neq 0$，并利用 $\sin 2x=2\sin x\cos x$，得

$$\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)=\frac{2\sin x\cos x}{2^{n+1}\sin(x/2^n)\cos x}=\frac{\sin x}{2^n\sin(x/2^n)}.$$

想一想 当 $n\to\infty$ 时，$2^n\sin(x/2^n)$ 会怎样?

设 $\theta=x/2^n$，于是当 $n\to\infty$ 时 $\theta\to 0$。那么

$$2^n\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)=x\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}\ \longrightarrow\ x\cdot 1=x,$$

因此

$$\prod_{k=1}^{\infty}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\sin(x/2^n)}=\frac{\sin x}{x}.$$

至于级数 (series)，代入 $j=k+2$：那么 $\frac{1}{2^{j-2}}=\frac{1}{2^k}$ 且 $\frac{\pi}{2^j}=\frac{\pi/4}{2^k}$，所以这个和就是第 (ii) 部分的级数取 $x=\frac{\pi}{4}$ 的情形，而此值位于 $(0,\frac{1}{2}\pi)$ 内。取这个 x 时，$2\cot 2x=2\cot\frac{\pi}{2}=0$，所以直至 $k=n$ 的部分和（partial sum）为

$$\frac{1}{2^n}\cot\left(\frac{\pi}{4\cdot 2^n}\right)=\frac{1}{x}\cdot\frac{\theta}{\tan\theta}\qquad\left(\theta=\frac{x}{2^n},\ x=\frac{\pi}{4}\right).$$

当 $n\to\infty$ 时，$\theta\to 0$ 且 $\theta/\tan\theta\to 1$，所以部分和趋于 $1/x$：

$$\sum_{j=2}^{\infty}\frac{1}{2^{j-2}}\tan\left(\frac{\pi}{2^j}\right)=\frac{4}{\pi}.$$

验算

- 第 (i) 部分：$\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ \approx 0.9397 \times 0.7660 \times 0.1736 \approx 0.1250$。
- 第 (ii) 部分取 $n = 0$：乘积就是 $\cos x$，而公式给出 $\sin 2x/(2\sin x) = \cos x$。取 $n = 0$ 时，和的恒等式变成 $\tan x = \cot x - 2\cot 2x$，这正是 cot 的二倍角公式移项后的形式。
- 第 (iii) 部分：级数的首几项为 $\tan \frac{\pi}{4} = 1$、$\frac{1}{2}\tan \frac{\pi}{8} \approx 0.2071$、$\frac{1}{4}\tan \frac{\pi}{16} \approx 0.0497$、...；经电脑验证，总和为 $1.27324\ldots = 4/\pi$。
- 在 $\prod \cos(x/2^k) = \sin x/x$ 中令 $x \to 0$，得 $1 = 1$，理应如此。

常见错误

- 数错 $\frac{1}{2}$ 因子的个数：由 $k = 0$ 到 n 的乘积有 $n + 1$ 个因子，所以分母是 2^{n+1}，而不是 2^n。
- 取对数时没有指出每个因子都是正数；这正是范围 $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ 重要的原因。
- 忘记 $2\cot 2x$ 在 $x = \frac{\pi}{4}$ 时为零，或者错用 $x = \frac{\pi}{2}$（这样 $j = 1$ 的项便是 $\tan \frac{\pi}{2}$，而它没有定义）。

STEP 之外

在 $\prod \cos(x/2^k) = \sin x/x$ 中设 $x = \frac{\pi}{2}$，并把每个余弦写成嵌套平方根，便得到韦达（Viète）公式 $\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdots$，这是数学史上第一个无穷乘积（infinite product）。像我们对有限乘积那样，对无穷乘积的对数逐项求导，是需要理据支持的；分析（analysis）的入门课程会讲清楚何时可以这样做。欧拉（Euler）乘积 $\sin x = x\prod_{n\geq 1}\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$ 也是从同样的思路发展而来。如想了解严谨的理论背景，可参阅 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。