详细解答

STEP II 2019，第 3 题

纯数学 · 多项式根的界限

STEP II 2019，第 3 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2019 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

关键思路

三角不等式（triangle inequality）让我们把多项式（polynomial）的每一项换成它的大小，从而估计整个多项式的上界；而当 $|x| < 1$ 时，这些大小构成一个等比级数（geometric series）。这就给出细小的根（root）的一个下界（lower bound）。至于较大的根，窍门是考虑 $1/\omega$：把 f 的系数（coefficient）倒转排列，得到的多项式形式完全相同，于是关于细小根的结果可以再派上用场一次。在第 (ii) 部分，这些界把寻找整数根的范围缩小至只剩四个候选值。

解答

三角不等式

两边均为非负，因此只需比较它们的平方。由于 $x_1x_2 \leq |x_1x_2| = |x_1||x_2|$，

$$|x_1 + x_2|^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 \leq |x_1|^2 + 2|x_1||x_2| + |x_2|^2 = (|x_1| + |x_2|)^2,$$

取非负平方根即得 $|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|$。

对于 n 个数，我们对 n 用归纳法（induction）。$n = 1$ 的情况是等式，而 $n = 2$ 已经证明。若结果对 $n - 1$ 个数成立，则对 $x_1 + \cdots + x_{n-1}$ 和 x_n 应用两个数的情况，得

$$\begin{aligned} |x_1 + \cdots + x_{n-1} + x_n| &\leq |x_1 + \cdots + x_{n-1}| + |x_n| \\ &\leq |x_1| + \cdots + |x_{n-1}| + |x_n|, \end{aligned}$$

这正是 n 个数的结果。

第 (i)(a) 部分

我们有 $f(x)-1=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+x^n$。先用三角不等式，再用 $|a_i|\le A$，最后对末项用 $1\le A$，得

$$\begin{aligned}|f(x)-1| &\le |a_1||x|+\cdots+|a_{n-1}||x|^{n-1}+|x|^n\\ &\le A(|x|+|x|^2+\cdots+|x|^n).\end{aligned}$$

因为 $0\le|x|<1$，而无穷级数的所有项均为非负，所以有限的等比和不超过无穷的等比和：

$$|x|+|x|^2+\cdots+|x|^n\le\sum_{k=1}^{\infty}|x|^k=\frac{|x|}{1-|x|}.$$

因此 $|f(x)-1|\le\dfrac{A|x|}{1-|x|}$，得证。

第 (i)(b) 部分

由于 $f(\omega)=0$，我们有 $|f(\omega)-1|=1$，故由 (a) 部分得

$$1\le\frac{A|\omega|}{1-|\omega|}.$$

因为 $1-|\omega|>0$，两边同乘时不等号方向不变：$1-|\omega|\le A|\omega|$，即 $1\le(1+A)|\omega|$，所以

$$|\omega|\ge\frac{1}{1+A}.$$

上界则是显然的：$|\omega|<1\le1+A$。因此 $(*)$ 成立。

第 (i)(c) 部分

现在 $|\omega|\ge1$。下界很容易：由于 $A\ge1>0$，有 $|\omega|\ge1>\frac{1}{1+A}$。真正需要证明的是上界。

若 $|\omega|=1$，则立即有 $|\omega|\le1+A$，因此设 $|\omega|>1$。令 $g(y)=y^n f(1/y)$，即

$$g(y)=1+a_{n-1}y+a_{n-2}y^2+\cdots+a_1y^{n-1}+y^n.$$

> ? **想一想** 为甚么 g 可以使用 (a) 和 (b) 部分的结果?

它的形式与 f 完全相同：常数项（constant term）为 1，首项系数（leading coefficient）为 1，其余系数是倒序排列的 $a_{n-1},\dots,a_1$，每个的大小仍然不超过 A。因此 (b) 部分可以用同一个 A 应用于 g。

由于 $\omega \neq 0$，$g(1/\omega) = \omega^{-n} f(\omega) = 0$，所以 $1/\omega$ 是 g 的一个实根，且 $|1/\omega| < 1$。对 g 应用 (b) 部分，得

$$\frac{1}{|\omega|} \geq \frac{1}{1+A}, \qquad \text{所以} \qquad |\omega| \leq 1 + A.$$

因此，无论大小如何，f 的每个实根都满足 $(*)$。（注意 0 永远不是根，因为 $f(0) = 1$。）

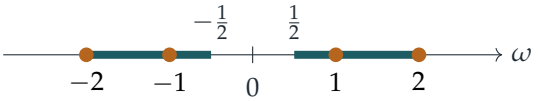
第 (ii) 部分

除以 135 并按升幂排列各项，方程即为 $f(x) = 0$，其中

$$f(x) = 1 - \tfrac{126}{135}x - \tfrac{91}{135}x^2 - \tfrac{100}{135}x^3 - x^4 + x^5.$$

这具有第 (i) 部分的形式，其中 $n = 5$：常数项和首项系数都是 1，其余系数的大小为 $\frac{126}{135}, \frac{91}{135}, \frac{100}{135}, 1$，全部不超过 $A = 1$。所以每个实根都满足

$$\tfrac{1}{2} \leq |\omega| \leq 2.$$



容许范围（涂色部分）内的整数只有 ± 1 和 ± 2。代入原来的五次多项式（quintic）$p(x) = 135x^5 - 135x^4 - 100x^3 - 91x^2 - 126x + 135$：

$$\begin{aligned} p(1) &= 135 - 135 - 100 - 91 - 126 + 135 = -182, \\ p(-1) &= -135 - 135 + 100 - 91 + 126 + 135 = 0, \\ p(2) &= 4320 - 2160 - 800 - 364 - 252 + 135 = 879, \\ p(-2) &= -4320 - 2160 + 800 - 364 + 252 + 135 = -5657. \end{aligned}$$

所以唯一的整数根是 $x = -1$。事实上

$$p(x) = (x+1)(135x^4 - 270x^3 + 170x^2 - 261x + 135),$$

而四次因式（quartic factor）在 $x = -1$ 时的值为 971，所以 -1 是单根（simple root）。

验算

- 展开 $(x+1)(135x^4 - 270x^3 + 170x^2 - 261x + 135)$，应得回原来的五次多项式。
- 这个五次多项式还有另外两个实根，约为 0.595 和 1.725；两者都在 $[\frac{1}{2}, 2]$ 之内，与第 (i) 部分的预测一致。
- 试取 $f(x) = 1 - 2x + x^2 = (1-x)^2$，其中 $A = 2$：根 1 落在 $[\frac{1}{3}, 3]$ 之内。这些界亦已用电脑在数百个随机多项式上验证过。

常见错误

- 在 (a) 部分忘记 x^n 项：它的系数是 1，而不是某个 a_n；正是 $A \geq 1$ 才让它可以并入等比级数。
- 在 (c) 部分，当 $|\omega| \geq 1$ 时试图直接在 ω 处再用 (a) 部分：此时等比级数不再收敛（converge）。应改为考虑 $1/\omega$。
- 在第 (ii) 部分把 135 的所有因数（divisors）逐一当作候选根测试：这样做是正确的，但第 (i) 部分的界只留下四个需要测试。

STEP 之外

以系数估计多项式的根的范围是一个经典课题；这里的结果是柯西（Cauchy）界（Cauchy's bound）的一个版本，而且同一论证对复根（complex roots）一字不改地成立，只需把绝对值（absolute value）换成模（modulus）。倒转变换 $y^n f(1/y)$ 把细小的根与较大的根互换，是代数和复分析（complex analysis）中的标准工具。若想了解这类界以及更多关于复根几何的内容，可以阅读 Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直观复分析》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。