详细解答

STEP II 2019，第 2 题

纯数学 · 反函数的积分

STEP II 2019，第 2 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2019 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

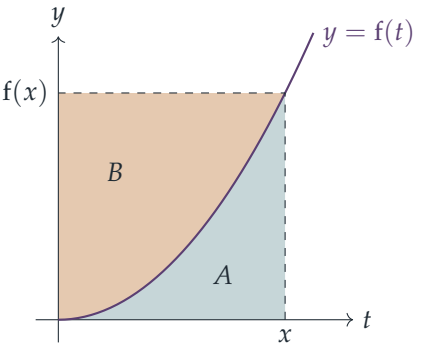
关键思路

$y = \mathrm{f}(t)$ 的图像把以 $(0,0)$ 和 $(x, \mathrm{f}(x))$ 为顶点的长方形分成两块。其中一块是曲线下方的面积，另一块是曲线与 y 轴之间的面积，而后者正是反函数（inverse function）的积分。因此两个积分之和等于长方形的面积。第 (i) 及 (ii) 部分的函数都只是隐式地定义，我们无法直接把它们积分，但它们的反函数却是简单的三次函数。这条恒等式让我们把一个困难的积分换成一个容易的积分。

解答

开首的结果

由于当 $t > 0$ 时 $\mathrm{f}'(t) > 0$，而且 $\mathrm{f}(0) = 0$，所以 f 在 $[0, x]$ 上严格递增（strictly increasing），因此当 $t > 0$ 时 $\mathrm{f}(t) > 0$，而 f 有一个由 $[0, \mathrm{f}(x)]$ 到 $[0, x]$ 的反函数 f^{-1}。同一条曲线既可以用 $y = \mathrm{f}(t)$ 描述，也可以用 $t = \mathrm{f}^{-1}(y)$ 描述。



区域 A 是在 $0 \le t \le x$ 范围内曲线与 t 轴之间的部分，其面积为

$$A = \int_0^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t.$$

区域 B 是在 $0 \le y \le \mathrm{f}(x)$ 范围内曲线与 y 轴之间的部分，由一条条水平窄条组成。位于高度 y 的窄条由 $t = 0$ 延伸至 $t = \mathrm{f}^{-1}(y)$，因此

$$B = \int_0^{\mathrm{f}(x)} \mathrm{f}^{-1}(y)\,\mathrm{d}y.$$

由于曲线递增，并由 $(0,0)$ 走到 $(x,\mathrm{f}(x))$，A 与 B 恰好拼合在一起，互不重叠，填满长方形 $0 \le t \le x$，$0 \le y \le \mathrm{f}(x)$。该长方形的面积是 $x\,\mathrm{f}(x)$，因此

$$\int_0^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{\mathrm{f}(x)} \mathrm{f}^{-1}(y)\,\mathrm{d}y = x\,\mathrm{f}(x),$$

即为所求。

第 (i) 部分

设 $\phi(y) = y^3 + y$。那么 $\phi'(y) = 3y^2 + 1 > 0$，所以 ϕ 严格递增，而且当 $y \to \pm\infty$ 时 $\phi(y) \to \pm\infty$。因此对每个实数 t，恰好有一个实数 y 使 $\phi(y) = t$，这个 y 就是 $\mathrm{g}(t)$。换句话说，$\mathrm{g} = \phi^{-1}$。

$\mathrm{g}(0) = 0$。代入 $t = 0$，得 $\mathrm{g}(0)(\mathrm{g}(0)^2 + 1) = 0$。由于 $\mathrm{g}(0)$ 是实数，$\mathrm{g}(0)^2 + 1 \ge 1$，故此 $\mathrm{g}(0) = 0$。

$\mathrm{g}'(t) > 0$。把 $\mathrm{g}(t)^3 + \mathrm{g}(t) = t$ 对 t 作隐函数求导（implicit differentiation），

$$(3\,\mathrm{g}(t)^2 + 1)\,\mathrm{g}'(t) = 1 \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{g}'(t) = \frac{1}{3\,\mathrm{g}(t)^2 + 1} > 0,$$

因为分母至少是 1。

> **想一想** 我们写不出 $\mathrm{g}(t)$ 的表达式，那怎样才能把它积分?

我们根本不需要写出来。g 满足开首结果的条件，而它的反函数是 $\phi(y) = y^3 + y$，很容易积分。以 $x = 2$ 应用该结果时需要知道 $\mathrm{g}(2)$，即 $y^3 + y = 2$ 的实根。这个根是 $y = 1$，而且由于 ϕ 严格递增，它是唯一的实根。因此

$$\int_0^2 \mathrm{g}(t)\,\mathrm{d}t = 2\,\mathrm{g}(2) - \int_0^1 (y^3 + y)\,\mathrm{d}y = 2 - \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}.$$

第 (ii) 部分

比较两个定义，$\mathrm{h}(t)$ 是 $y^3 + y = t + 2$ 的实数解，所以 $\mathrm{h}(t) = \mathrm{g}(t+2)$。代入 $u = t + 2$，

$$\int_0^8 \mathrm{h}(t)\,\mathrm{d}t = \int_2^{10} \mathrm{g}(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{10} \mathrm{g}(u)\,\mathrm{d}u - \int_0^2 \mathrm{g}(u)\,\mathrm{d}u.$$

对于第一个积分，我们以 $x = 10$ 应用开首的结果。由于 $2^3 + 2 = 10$，我们有 $\mathrm{g}(10) = 2$，因此

$$\int_0^{10} \mathrm{g}(u)\,\mathrm{d}u = 10 \times 2 - \int_0^2 (y^3 + y)\,\mathrm{d}y = 20 - (4 + 2) = 14.$$

第二个积分则用第 (i) 部分的结果，

$$\int_0^8 \mathrm{h}(t)\,\mathrm{d}t = 14 - \frac{5}{4} = \frac{51}{4}.$$

另一种方法。我们也可以直接对 h 应用这幅图。这次 $\mathrm{h}(0) = 1$，而不是 0。曲线由 $(0,1)$ 走到 $(8,2)$，而 $\mathrm{h}^{-1}(y) = y^3 + y - 2$。曲线下方的面积等于 8×2 的长方形，减去 0×1 的长方形（这里是空的），再减去在 $1 \le y \le 2$ 范围内曲线左方的面积：

$$16 - \int_1^2 (y^3 + y - 2)\,\mathrm{d}y = 16 - \left(\tfrac{15}{4} + \tfrac{3}{2} - 2\right) = 16 - \tfrac{13}{4} = \tfrac{51}{4}.$$

验算

- 在 $[0,2]$ 上 $0 \le \mathrm{g}(t) \le 1$，所以 (i) 的积分必定介乎 0 与 2 之间。此外，g 在该区间上是凹函数（concave）（它是一个递增凸函数（convex function）的反函数），所以积分至少等于三角形面积 $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1$。答案 $\frac{5}{4}$ 符合这些要求。
- 在 (ii) 中，在 $[0,8]$ 上 $1 \le \mathrm{h}(t) \le 2$，所以积分介乎 8 与 16 之间，而 12.75 亦符合。
- 在多个点上以数值方法解这些三次方程，再用辛普森法则（Simpson's rule）积分，得到 1.25000 和 12.75000，与准确答案吻合。

常见错误

- 反函数积分的上限用错：上限是 $\mathrm{g}(2) = 1$，而不是 2。
- 把开首的结果应用于 h 时，误以为 $\mathrm{h}(0) = 0$。由于 $\mathrm{h}(0) = 1$，图中多了一条窄条，恒等式需要作出调整（或者改用 $\mathrm{h}(t) = \mathrm{g}(t+2)$）。
- 忘记证明 g 的定义是良好的，即 $y^3 + y = t$ 恰好有一个实根。

STEP 之外

开首的恒等式是杨氏不等式（Young's inequality）取等号的情况：对于满足 $\mathrm{f}(0) = 0$ 的递增函数 f 及任何 $a, b \ge 0$，都有 $ab \le \int_0^a \mathrm{f} + \int_0^b \mathrm{f}^{-1}$。取 $\mathrm{f}(t) = t^{p-1}$ 便得到 $ab \le a^p/p + b^q/q$，这是分析学中赫尔德不等式（Hölder's inequality）的出发点。g 可导且 $\mathrm{g}' = 1/\phi'(\mathrm{g})$ 这

个事实，就是反函数定理（inverse function theorem）。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）对此有仔细的证明。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。