详细解答

STEP II 2019，第 11 题

概率与统计 · 三角形的计数

STEP II 2019，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2019 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

关键思路

三条长度能构成面积非零的三角形（triangle），当且仅当较短的两条长度之和大于最长的一条。因此，整个问题归结为在最大值固定的情况下数算数对的个数；最简洁的数法，是固定中间的数 n_2，再问 n_1 可以取多少个值。第 (i) 部分负责计数；第 (ii) 和第 (iii) 部分只需除以相应的等可能（equally likely）选择总数。

解答

第 (i) 部分

记 $m = n_3$。固定 $n_2 = k$，其中 $k \leq m-1$。那么 n_1 必须满足

$$m - k < n_1 < k,$$

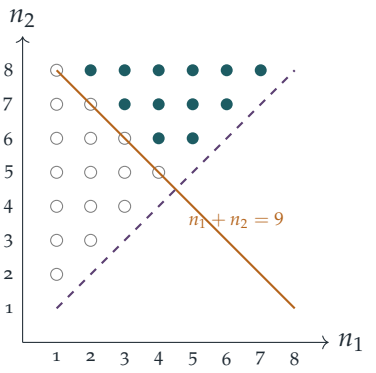
所以 n_1 取遍 $m-k+1, \ldots, k-1$，当 $2k-m-1$ 为正数时，共有 $2k-m-1$ 个选择。（由于 $m-k \geq 1$，条件 $n_1 > 0$ 自动成立。）

当 $m = 9$ 时，个数为 $2k-10$，在 $k = 6,7,8$ 时为正数：

$$2+4+6 = 12.$$

当 $m = 10$ 时，个数为 $2k-11$，在 $k = 6,7,8,9$ 时为正数：

$$1+3+5+7 = 16.$$



上图显示 $n_3 = 9$ 的情况：实心点位于直线 $n_1 + n_2 = 9$ 上方，同时位于对角线 $n_1 = n_2$ 上方，共有 $2 + 4 + 6 = 12$ 个，每个 n_2 对应三角形区域中的一列。

奇数情况， $n_3 = 2n + 1$。当 $n_2 = k$ 时，个数为 $2k - 2n - 2 = 2(k - n - 1)$，在 $k = n + 2, \ldots, 2n$ 时为正数。设 $j = k - n - 1$，它由 1 取到 $n - 1$，

$$\sum_{j=1}^{n-1} 2j = (n-1)n = n(n-1).$$

偶数情况， $n_3 = 2n$。当 $n_2 = k$ 时，个数为 $2k - 2n - 1$，在 $k = n + 1, \ldots, 2n - 1$ 时为正数。设 $j = k - n$，它由 1 取到 $n - 1$，

$$\sum_{j=1}^{n-1} (2j-1) = (n-1)^2,$$

即首 $n - 1$ 个奇数之和。两条公式都与 $12 = 4 \cdot 3$ 及 $16 = 4^2$ 吻合。

第 (ii) 部分

长度为 N 的棒是三条中最长的，所以这三条棒构成面积非零的三角形，当且仅当所选的两条长度 $a < b$ 满足 $a + b > N$。（其余两条三角不等式（triangle inequality），例如 $a + N > b$，由于 $N > b$ 而自动成立。）因此，有利的选择正是第 (i) 部分中 $n_3 = N$ 时所数算的数对。

两条棒是从余下的 $N - 1$ 条中选出的，所以共有 $\binom{N-1}{2}$ 个等可能的选择。

当 $N = 2n + 1$ 时：共有 $\binom{2n}{2} = n(2n-1)$ 个选择，所以

$$\mathrm{P}(\text{三角形}) = \frac{n(n-1)}{n(2n-1)} = \frac{n-1}{2n-1},$$

此即所求。

当 $N = 2n$ 时：共有 $\binom{2n-1}{2} = (2n-1)(n-1)$ 个选择。要使它非零，我们需要 $n \geq 2$（当 $N = 2$ 时只剩一条棒，无法选出两条）。于是

$$\mathrm{P}(\text{三角形}) = \frac{(n-1)^2}{(2n-1)(n-1)} = \frac{n-1}{2n-1}.$$

颇出人意料的是，尽管 N 小了一，答案却与奇数情况的公式完全相同。

第 (iii) 部分

任意三条不同的棒都有一条最长的，设其长度为 m，其中 $3 \leq m \leq 2M+1$。这个选择能构成三角形，当且仅当另外两条长度构成第 (i) 部分中 $n_3 = m$ 时所数算的其中一个数对。每个有利选择都只在其最长的棒之下被数算一次，所以有利选择的个数为

$$T = \sum_{m=2}^{2M+1} c(m),$$

其中 $c(m)$ 是第 (i) 部分得出的个数。（由于 $c(2) = 0$，把 $m = 2$ 包括在内并无影响。）

? **想一想** $c(m)$ 对奇数和偶数 m 有不同的公式，那该怎样把它们加起来呢?

把它们配对。对每个 $n = 1, \ldots, M$，把偶数值 $m = 2n$ 和奇数值 $m = 2n+1$ 放在一起；这样恰好把 $m = 2, 3, \ldots, 2M+1$ 各涵盖一次。每对的总贡献为

$$(n-1)^2 + n(n-1) = (n-1)(2n-1) = 2n^2 - 3n + 1.$$

利用题目给出的 $\sum k^2$ 公式及 $\sum k = \frac{1}{2}M(M+1)$，

$$\begin{aligned} T &= \sum_{n=1}^{M} \left(2n^2 - 3n + 1\right) \\ &= \tfrac{1}{3}M(M+1)(2M+1) - \tfrac{3}{2}M(M+1) + M \\ &= \tfrac{1}{6}M\left[2(2M^2+3M+1) - 9(M+1) + 6\right] \\ &= \tfrac{1}{6}M\left(4M^2 - 3M - 1\right) \\ &= \tfrac{1}{6}M(4M+1)(M-1). \end{aligned}$$

选出三条棒的等可能选择总数为

$$\binom{2M+1}{3} = \frac{(2M+1)(2M)(2M-1)}{6}.$$

相除，并约去 $M/6$，

$$\mathrm{P}(\text{三角形}) = \frac{M(4M+1)(M-1)}{2M(2M+1)(2M-1)} = \frac{(4M+1)(M-1)}{2(2M+1)(2M-1)},$$

此即所求。

验算

- $M = 1$：棒的长度为 $1, 2, 3$，而 $1 + 2 = 3$ 只得出退化三角形（degenerate triangle），所以概率应为 0，公式亦给出 0。
- $M = 2$：棒的长度为 1 至 5。能构成的三角形有 $\{2, 3, 4\}$、$\{2, 4, 5\}$ 和 $\{3, 4, 5\}$，所以概率为 $3/10$；公式给出 $\frac{9 \cdot 1}{2 \cdot 5 \cdot 3} = \frac{3}{10}$。
- 当 $M \to \infty$ 时，概率趋向 $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$。这与连续版本吻合：若三条长度独立地在 $[0, 1]$ 上均匀分布，较短两条之和大于最长一条的概率为 $\frac{1}{2}$。
- 第 (i) 部分的所有个数，以及第 (ii) 和第 (iii) 部分的所有概率，都已用电脑直接列举每个数对或三元组加以核实，范围为 n 至 39、M 至 19（例如 $M = 3$ 时得 $13/35$）。

常见错误

- 容许 $n_1 + n_2 = n_3$：长度为 $2, 3, 5$ 的三条棒只会平躺成一直线，面积为零，所以不等式必须是严格的。
- 在第 (ii) 部分用了 $\binom{N}{2}$ 而非 $\binom{N-1}{2}$：长度为 N 的棒已经被选走了。
- 在第 (iii) 部分只对 m 的奇数值（或只对偶数值）求和：最长的棒可以是由 3 至 $2M + 1$ 的任何长度。

STEP 之外

按最大元素把计数分拆，然后求和，是组合数学（combinatorics）中的标准技巧；同一思路对最大值的取值积分，便得出连续情况的答案 $\frac{1}{2}$。像上图那样数算某区域内的格点（lattice points），再与该区域的面积比较，正是连接离散概率与连续概率的桥梁。Blitzstein 与 Hwang 的 *Introduction to Probability*（《概率导论》）收录了许多这类问题，包括经典的“断棍”三角形问题。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。