详细解答

STEP II 2019，第 10 题

力学 • 刚体平衡

STEP II 2019，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2019 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

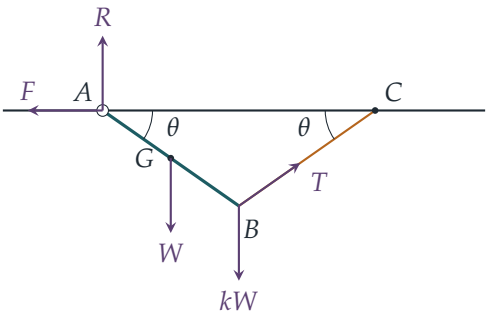
关键思路

由于 $AB = BC = 2a$，而且 A、C 都在轨道上，三角形 ABC 是等腰三角形（isosceles triangle），所以绳子与轨道所成的角也是 θ。掌握了这个几何关系后，这就是一道标准的刚体（rigid body）平衡（equilibrium）问题：对 A 取力矩（moments），可以求出张力（tension）而不牵涉环上的未知力；然后再分解（resolving）各力，便得到法向反作用力（normal reaction）和摩擦力（friction）。最后一部分比较 k 的两个临界值：当 k 增大时，哪一个会先被达到？

解答

模型与受力。 杆是均匀的刚体，所以其重量 W 作用于中点 G，且 $AG = a$。环是轻的，所以轨道对环的力会直接传到杆的 A 端：一个铅垂向上的法向反作用力 R，以及一个沿轨道方向的摩擦力 F。绳子是轻而不可伸长的，张力 T 在 B 点沿 BC 方向作用。额外负载 kW 在 B 点铅垂向下作用。

在三角形 ABC 中，AB 和 BC 两边都等于 $2a$，所以 A 和 C 处的底角相等：绳子与轨道所成的角是 θ。在水平方向上，B 与 A 相距 $2a\cos\theta$，C 与 A 相距 $4a\cos\theta$。



我们设 F 沿轨道指向远离 C 的方向；稍后会看到它必然如此，因为绳子把杆拉向 C。

第 (i) 部分

对 A 取力矩，这样便消去了 R 和 F。重量和负载的力臂分别是 $a\cos\theta$ 和 $2a\cos\theta$。至于张力，把它在 B 点分解为水平分量 $T\cos\theta$（指向 C）和铅垂向上的分量 $T\sin\theta$。铅垂分量的力臂是 $2a\cos\theta$，水平分量的力臂是 $2a\sin\theta$（即 B 在轨道下方的深度），而两者都使杆向同一方向转动，即图中的逆时针方向。所以

$$T\sin\theta\cdot 2a\cos\theta + T\cos\theta\cdot 2a\sin\theta = W\cdot a\cos\theta + kW\cdot 2a\cos\theta,$$
$$4aT\sin\theta\cos\theta = aW(1+2k)\cos\theta.$$

由于当 $0<\theta<90^\circ$ 时 $\cos\theta\neq 0$，我们可以除以 $a\cos\theta$：

$$T = \frac{(2k+1)W}{4\sin\theta}.$$

只要环没有滑动，不论环的情况如何，这个结果都成立。若 $T>W$，绳子便会断裂，即 $(2k+1)W > 4W\sin\theta$（两边乘以 $4\sin\theta>0$），亦即

$$2k+1 > 4\sin\theta,$$

此即所求。

第 (ii) 部分

对整条杆分解各力。铅垂方向：

$$R + T\sin\theta = W + kW \quad\Longrightarrow\quad R = (1+k)W - \frac{(2k+1)W}{4} = \frac{(2k+3)W}{4}.$$

水平方向上，只有 F 和张力的水平分量，所以

$$F = T\cos\theta = \frac{(2k+1)W\cos\theta}{4\sin\theta}.$$

这是正数，证实了摩擦力的方向是远离 C。另外留意 $R>0$，所以环确实是从上方压在轨道上。

想一想 粗糙轨道上的环，究竟在甚么时候会滑动?

摩擦力最多只能提供 μR。若平衡需要 $F > \mu R$，摩擦力便无法令环保持静止，环就会滑动。所以环滑动的条件是

$$\frac{(2k+1)W\cos\theta}{4\sin\theta} > \mu\,\frac{(2k+3)W}{4}.$$

两边乘以 $4\sin\theta/(W\cos\theta) > 0$，得

$$2k+1 > (2k+3)\mu\tan\theta,$$

此即所求。

第 (iii) 部分

记 $t = \tan\theta$ 及 $s = \sin\theta$。每个条件都表示 k 已超过某个临界值。

绳子。由第 (i) 部分，当 $2k+1 > 4s$ 时绳子断裂，即当

$$k > k_{\text{断裂}} = \frac{4s-1}{2}.$$

环。把第 (ii) 部分的条件重新整理:

$$2k+1 > (2k+3)\mu t \iff 2k(1-\mu t) > 3\mu t - 1.$$

这里用到 $\mu t < 1$: 除以 $2(1-\mu t) > 0$ 不会改变不等式（inequality）的方向，所以当

$$k > k_{\text{滑动}} = \frac{3\mu t - 1}{2(1-\mu t)}.$$

时环便会滑动。（若没有 $\mu t < 1$ 这个条件，环永远不会滑动。若 $\mu t \geq 1$，则对所有 k 都有 $(2k+3)\mu t \geq 2k+3 > 2k+1$。这正是题目给出此条件的原因。）

当 k 从零开始增大时，较低的临界值会先被越过。所以环在绳子断裂之前滑动，当且仅当 $k_{\text{滑动}} < k_{\text{断裂}}$。先乘以 $1-\mu t > 0$，

$$\begin{aligned}
\frac{3\mu t-1}{1-\mu t} < 4s-1 &\iff 3\mu t - 1 < (4s-1)(1-\mu t)\\
&\iff 3\mu t - 1 < 4s - 1 - 4s\mu t + \mu t\\
&\iff 2\mu t + 4s\mu t < 4s\\
&\iff \mu t(1+2s) < 2s\\
&\iff \mu < \frac{2\sin\theta}{\tan\theta\,(1+2\sin\theta)} = \frac{2\cos\theta}{1+2\sin\theta},
\end{aligned}$$

最后一步除以了 $t(1+2s) > 0$。这就是所求的条件。

杆起初处于平衡状态，所以在 $k = 0$ 时两个临界值都尚未被越过。由于每个条件都是“k 大于某个值”，两个临界值都只会被越过一次。所以比较两个临界值，确实能决定哪件事先发生。

验算

- 改为对 B 取力矩，会得到相同的答案。A 处的力对 B 的力矩是 $R \cdot 2a\cos\theta - F \cdot 2a\sin\theta$，而重量的力矩是 $Wa\cos\theta$。代入 R 和 F 的值，得 $\frac{1}{2}(2k+3)Wa\cos\theta - \frac{1}{2}(2k+1)Wa\cos\theta = Wa\cos\theta$，恰好与重量的力矩平衡。
- 取 $\theta = 30°$。那么 $k_{\text{断裂}} = \frac{1}{2}$，而临界摩擦系数（coefficient of friction）是 $2\cos 30°/(1+2\sin 30°) = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866$，所以 $\mu t = 0.866 \times 0.577 = \frac{1}{2}$。在这个 μ 下，$k_{\text{滑动}} = \frac{3/2-1}{2\cdot\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$ 也成立，所以两个临界值重合，正如在边界上应有的情况。
- 我们用电脑验证了，对许多随机的 θ 和 k，所有力和力矩都平衡。我们亦对随机的 θ 和 μ 把 k 逐小步增大：环先滑动，当且仅当 $\mu < 2\cos\theta/(1+2\sin\theta)$。

常见错误

- 在对 A 取力矩时忘记了张力的水平分量。它的力臂是 $2a\sin\theta$，并令张力的力矩加倍，$4\sin\theta$ 中的 4 正是由此而来。
- 取 $R = (1+k)W$。绳子承担了部分重量，所以法向反作用力小于总负载。
- 除以 $1 - \mu\tan\theta$ 时没有说明它是正数。题目给出的条件 $\mu\tan\theta < 1$ 正是为此而设。

STEP 之外

这是一个静定（statically determinate）问题：有三个未知量（T、R、F），而平面上的刚体有三条平衡方程。第 (iii) 部分展示了这类结构典型的失效方式：比较每个约束分别在多大负载下失效。工程师也会问同样的问题：结构中哪一个构件会最先失效？Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）仔细讲解刚体静力学和扭矩（torque），并进而讨论转动动力学（rotational dynamics）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。