详细解答

STEP II 2019，第 1 题

纯数学 · 三次曲线的切线

STEP II 2019，第 1 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2019 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

关键思路

先写出 $x = a$ 处的切线 (tangent) 通过 $(p, 0)$ 的条件，再代入 $f(x) = (x - p)g(x)$：几乎所有项都互相抵消，只剩下 $g'(a)$ 的某个倍数。因此，对于三次函数 (cubic) 而言，从根 p 出发的切线与曲线相切之处，正是另一个二次因式 (quadratic factor) 取驻值 (stationary) 之处，即另外两个根的正中间。第 (ii) 部分则归结为比较两个斜率 (gradient)，以及把“切线与三次曲线交点”的方程因式分解 (factorise)；这个方程在接触点 (point of contact) 处必定有一个重根 (double root)。

解答

开首的结果

$x = a$ 处的切线为 $y = f(a) + f'(a)(x - a)$。由乘积法则 (product rule)，$f'(x) = g(x) + (x - p)g'(x)$。切线通过 $(p, 0)$ 当且仅当

$$\begin{aligned} 0 &= f(a) + f'(a)(p - a) \\ &= (a - p)g(a) + [g(a) + (a - p)g'(a)](p - a) \\ &= (a - p)g(a) - (a - p)g(a) - (a - p)^2 g'(a) \\ &= -(a - p)^2 g'(a). \end{aligned}$$

由于 $a \neq p$，因子 $(a - p)^2$ 不为零，所以上式成立当且仅当 $g'(a) = 0$。这就一次过证明了结果的两个方向。

第 (i) 部分

此处 $f(x)=(x-p)g(x)$，其中 $g(x)=A(x-q)(x-r)=A(x^2-(q+r)x+qr)$，所以 $g'(x)=A(2x-(q+r))$。由开首的结果，并因为 $A\neq 0$，

$$g'(a)=0 \iff 2a=q+r.$$

（注意 $a=\frac{1}{2}(q+r)>q>p$，所以 $a\neq p$，符合要求。）

至于斜率，由于 $g'(a)=0$，有 $f'(a)=g(a)+(a-p)g'(a)=g(a)$。利用 $a-q=\frac{1}{2}(r-q)$ 及 $a-r=-\frac{1}{2}(r-q)$，

$$f'(a)=A\cdot\tfrac{1}{2}(r-q)\cdot(-\tfrac{1}{2}(r-q))=-\frac{A(r-q)^2}{4}.$$

第 (ii) 部分

现在改为抽出根 r：$f(x)=(x-r)h(x)$，其中 $h(x)=A(x-p)(x-q)$。开首的结果以 r 代替 p 后同样适用（推导中完全没有用到选了哪一个根），所以 $x=c$ 处的切线通过 $(r,0)$ 当且仅当 $h'(c)=0$，即 $c=\frac{1}{2}(p+q)$。与第 (i) 部分完全一样，其斜率为

$$f'(c)=h(c)=A\cdot\tfrac{1}{2}(q-p)\cdot(-\tfrac{1}{2}(q-p))=-\frac{A(q-p)^2}{4}.$$

因此，由于 $A\neq 0$，

$$\text{两切线平行} \iff (r-q)^2=(q-p)^2 \iff r-q=q-p \iff q=\tfrac{1}{2}(p+r),$$

其中中间一步用到 $r-q>0$ 及 $q-p>0$，所以可以取正平方根。

想一想 不解三次方程，怎样找出切线与三次曲线的另一个交点？

我们其实已经知道一个根，而且是重复两次的：接触点。在 $x=q$ 处，斜率为 $f'(q)=A(q-p)(q-r)$（乘积法则中另外两项因含有 $x-q$ 而消失），且 $f(q)=0$，所以该处的切线为 $y=A(q-p)(q-r)(x-q)$。它与曲线相交于

$$A(x-p)(x-q)(x-r)=A(q-p)(q-r)(x-q).$$

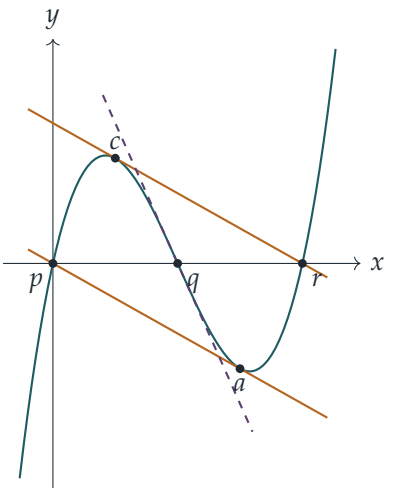
两边除以 $A\neq 0$ 并抽出因子 $x-q$，

$$\begin{aligned}0&=(x-q)[(x-p)(x-r)-(q-p)(q-r)]\\&=(x-q)[x^2-q^2-(p+r)(x-q)]\\&=(x-q)^2(x+q-p-r).\end{aligned}$$

所以切线与曲线相交于 $x=q$（一个重根，正如接触点所应有的）及 $x=p+r-q$，除此以外再无其他交点。切线不会再与曲线相交，当且仅当这第三个根与 q 重合：

$$p+r-q=q \iff q=\tfrac{1}{2}(p+r).$$

这与之前的条件相同，所以第 (i) 及第 (ii) 部分的两条切线互相平行，当且仅当 $x = q$ 处的切线不再与曲线相交。



草图显示 $q = \frac{1}{2}(p + r)$ 的情况：两条切线（琥珀色）互相平行，而 q 处的切线（虚线）在该点穿过曲线，却不在其他任何地方与曲线相交，因为此时 q 正是拐点（point of inflection）。

验算

- 取 $p = 0$、$q = 1$、$r = 2$、$A = 3$，则 $f(x) = 3x^3 - 9x^2 + 6x$。于是 $f'(x) = 9x^2 - 18x + 6$，得 $f'(\frac{3}{2}) = -\frac{3}{4}$ 及 $f'(\frac{1}{2}) = -\frac{3}{4}$，两者都等于 $-A(r-q)^2/4 = -A(q-p)^2/4 = -\frac{3}{4}$，所以两切线平行；这与预测相符，因为 q 是 p 与 r 的中点（midpoint）。
- $x = \frac{3}{2}$ 处的切线为 $y = -\frac{9}{8} - \frac{3}{4}(x - \frac{3}{2})$，在 $x = 0$ 时其值为 0：它确实通过 $(p, 0)$。
- 以上所有恒等式亦已用电脑以精确算术，就大约二千组随机选取的 $p < q < r$ 及 A 验证过。

常见错误

- 忘记正是 $a \neq p$ 才容许我们约去 $(a-p)^2$；没有这个条件，“仅当”方向便不成立，因为 p 处本身的切线必定通过 $(p, 0)$。
- 写出 $(r-q)^2 = (q-p)^2 \Rightarrow r - q = q - p$，却没有说明为何排除负根。
- 尝试从头解三次方程求交点，而不利用接触点处已知的重根。

STEP 之外

$x = q$ 处的切线之所以特别，是因为此时 q 是拐点，亦即三次曲线的对称中心（centre of symmetry）：每条三次曲线绕其拐点作半周旋转（half-turn）后都保持不变，这正是两条切线变得平行的原因。这里的切线与弦（chord）构作，是迈向三次曲线几何的第一步；在那里，直线与三次曲线的第三个交点被用来定义曲线上点的加法（椭圆曲线（elliptic curves））。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《数学进阶问题》）有更多同类风格的题目。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。