详细解答

STEP I 2019，第 9 题

力学 · 倾倒与摩擦力

STEP I 2019，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2019 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP I 试卷：

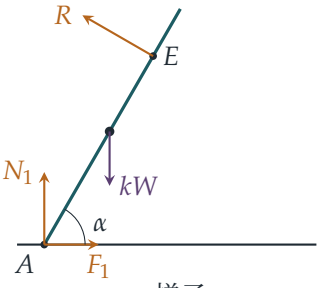
www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

关键思路

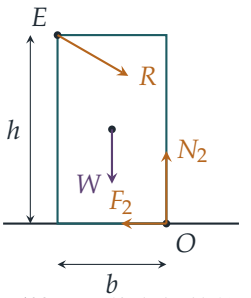
把梯子和箱子看作两个独立的物体，两者之间只靠一个力相连。由于接触处光滑（smooth），这个力垂直于梯子，所以它的作用线由 α 决定，只有大小是未知的。对梯子以其底端取力矩（moments），可求出这个力的大小；对箱子以它将要翻倒（topple）所绕的那条棱取力矩，便得到翻倒的条件。关系式 $h = b\tan\alpha$ 的作用，是让箱子的力矩化简成一个倍角表达式。

解答

把箱子视为均匀的刚性长方体（rigid cuboid），梯子视为轻杆（light rod），油漆工视为质点（particle）。梯子与箱子之间的接触是光滑的；两处与地面的接触都是粗糙（rough）的。设 E 为梯子所接触的那条棱，A 为梯子的底端，O 为箱子底部离梯子最远的那条棱（即箱子翻倒时所绕的棱）。



梯子



箱子（处于即将翻倒的状态）

第 (i) 部分

由于 E 处没有摩擦，箱子对梯子的作用力 R 垂直于梯子。因为 E 位于高度 h，沿梯子量度有 $AE = h/\sin\alpha$。当油漆工位于高度 λh 时，其沿梯子与 A 的距离为 $\lambda h/\sin\alpha$，所以与 A 的水平距离为 $\lambda h\cot\alpha$。

梯子是轻的，所以对 A 的力矩只来自 R 和油漆工的重量（N_1 和 F_1 都作用于 A）。由于 R 垂直于 AE，它的力臂就是 AE 本身：

$$R\cdot\frac{h}{\sin\alpha} = kW\cdot\lambda h\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad\Longrightarrow\quad R = k\lambda W\cos\alpha,$$

即为所求。（严格来说，这在攀爬的每一阶段都成立，其中 λh 是油漆工当时的高度。）

第 (ii) 部分

根据牛顿第三定律（Newton's third law），梯子在 E 处以垂直于梯子、指向箱子内部的力 R 推动箱子。它的分量是水平方向的 $R\sin\alpha$（背离梯子，指向 O）及竖直向下的 $R\cos\alpha$。

当箱子即将绕 O 翻倒时，地面的反作用力完全作用于 O，所以 N_2 和 F_2 对 O 没有力矩。对 O 取力矩，以顺时针方向（即箱子翻倒的方向）为正。E 与 O 的水平距离为 b，并位于 O 上方高度 h 处，所以

- 水平分量 $R\sin\alpha$ 作用于高度 h，其力矩为 $+Rh\sin\alpha$；
- 竖直分量 $R\cos\alpha$ 作用于 O 靠梯子一侧、距离为 b 处，其力矩为 $-Rb\cos\alpha$（在那一侧向下压会阻止翻倒）；
- 重量 W 作用于与 O 距离 $\frac{1}{2}b$ 处，其力矩为 $-\frac{1}{2}Wb$。

当总力矩达到零时，箱子开始翻倒：

$$R(h\sin\alpha - b\cos\alpha) = \tfrac{1}{2}Wb.$$

想一想 $h = b\tan\alpha$ 在这里有甚么帮助?

代入后得

$$h\sin\alpha - b\cos\alpha = b\,\frac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{b\cos 2\alpha}{\cos\alpha}.$$

利用第 (i) 部分的 $R = k\lambda W\cos\alpha$，条件变为

$$-k\lambda W\cos\alpha\cdot\frac{b\cos 2\alpha}{\cos\alpha} = \tfrac{1}{2}Wb \quad\Longrightarrow\quad 2k\lambda\cos 2\alpha + 1 = 0,$$

即为所求。注意这要求 $\cos 2\alpha < 0$，即 $\alpha > 45°$，这与 $h > b$ 一致。

第 (iii) 部分

对箱子分解力（地面对它的反作用力有指向梯子的分量 F_2 和向上的分量 N_2）：

$$F_2 = R\sin\alpha, \qquad N_2 = W + R\cos\alpha.$$

箱子不滑动，所以 $F_2 \le \mu N_2$，即 $\mu \ge \dfrac{R\sin\alpha}{W + R\cos\alpha}$。

> **想一想** 在攀爬过程中的哪一刻，这个条件最难满足？

比值 $\dfrac{R\sin\alpha}{W + R\cos\alpha} = \dfrac{\sin\alpha}{W/R + \cos\alpha}$ 随 R 递增，而 R 随油漆工往上爬而增大。所以对摩擦力要求最大的时刻就是即将翻倒的一刻，我们需要不等式在该处成立。由 (ii)，$k\lambda = -\dfrac{1}{2\cos 2\alpha}$，所以

$$R = -\frac{W\cos\alpha}{2\cos 2\alpha}.$$

于是

$$R\sin\alpha = -\frac{W\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos 2\alpha} = -\frac{W\sin 2\alpha}{4\cos 2\alpha},$$

$$W + R\cos\alpha = W\left(1 - \frac{\cos^2\alpha}{2\cos 2\alpha}\right) = W\,\frac{4\cos 2\alpha - (1+\cos 2\alpha)}{4\cos 2\alpha} = W\,\frac{3\cos 2\alpha - 1}{4\cos 2\alpha},$$

这里用了 $2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha$。两式相除，得

$$\mu \ge \frac{-\sin 2\alpha}{3\cos 2\alpha - 1} = \frac{\sin 2\alpha}{1 - 3\cos 2\alpha},$$

即为所求。由于 $45^\circ < \alpha < 90^\circ$ 给出 $\sin 2\alpha > 0$ 及 $\cos 2\alpha < 0$，分子和分母都是正数。

验算

- 取 $\alpha = 60^\circ$，则 $\cos 2\alpha = -\frac{1}{2}$。第 (ii) 部分给出 $k\lambda = 1$，所以 $R = \frac{1}{2}W$。于是 $F_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}W$ 及 $N_2 = \frac{5}{4}W$，得 $\mu \ge \frac{\sqrt{3}}{5} \approx 0.346$，与 $\sin 120^\circ / (1 - 3\cos 120^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} / \frac{5}{2}$ 吻合。
- 当 $\alpha \to 45^\circ$（箱子接近正方体，高度只是略大于宽度），$\cos 2\alpha \to 0$，而 (ii) 要求 $k\lambda \to \infty$：E 处的推力几乎沿着直线 EO，所以几乎没有转动效果。这与几何吻合：由于 $h = b\tan\alpha$，当 α 接近 45° 时，通过 E 的 R 的作用线差不多经过 O。
- 力矩方程、翻倒高度和摩擦力的界限，亦已用电脑就 α、b、k 和 W 的多组随机取值验证。

常见错误

- 把 E 处的力当作水平方向（就像光滑墙壁的情况）。这里的接触是与一条棱接触，所以力垂直于梯子。

- 忘记 R 的竖直分量会加到箱子的法向反作用力（normal reaction）上，因此 $N_2 = W + R\cos\alpha$，而不是 W。
- 对箱子底部错误的那条棱取力矩：箱子是绕离梯子较远的那条棱翻倒的。

STEP 之外

这是双物体静力学（statics）：把每个物体分开考虑，在接触处运用牛顿第三定律，并选取能消去未知量的力矩中心。物体会先滑动还是先翻倒、随着负载增加哪个约束会最先失效，这些问题贯穿工程力学以及接触刚体的研究。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）正是以这种精神处理刚体静力学与摩擦。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。