详细解答

STEP I 2019，第 8 题

纯数学 · 代换积分法

STEP I 2019，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2019 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP I 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

关键思路

题目说明不必求出 f 的表达式，所以每一部分都是要把一个积分改造，直至它的样子完全变成

$$\int_1^X \sqrt{\frac{t-1}{t+1}}\,\mathrm{d}t = \mathrm{f}(X)$$

其中 X 是某个积分上限。两个步骤几乎完成全部工作：一是伸缩（stretch）（$u = kt$），把 $\frac{u-k}{u+k}$ 变成 $\frac{t-1}{t+1}$；二是平移（shift）（$u = t + c$），使分式中的两个数关于零对称。最后一部分还需要多一个代换，把一个商的平方根变成形式合适的函数。

解答

全题都用到这个事实：代换（substitution）会同时改变被积函数（integrand）、微分（differential）以及积分限（limits）；答案正正出现在积分上限之中。

第 (i) 部分

若设 $u = 2t$，被积函数 $\sqrt{\frac{u-2}{u+2}}$ 便会变成 $\sqrt{\frac{t-1}{t+1}}$，因为此时 $\frac{2t-2}{2t+2} = \frac{t-1}{t+1}$。由于 $\mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}t$，而积分限为 $u = 2 \mapsto t = 1$、$u = x \mapsto t = \frac{1}{2}x$，

$$\int_2^x \sqrt{\frac{u-2}{u+2}}\,\mathrm{d}u = \int_1^{x/2} \sqrt{\frac{t-1}{t+1}}\,2\,\mathrm{d}t = 2\,\mathrm{f}(\tfrac{1}{2}x).$$

条件 $x > 2$ 正好保证 $\frac{1}{2}x > 1$，因此 $\mathrm{f}(\frac{1}{2}x)$ 有定义。这就是所求的结果。

第 (ii) 部分

这里分式中的两个数是 0 和 -4，并不关于零对称。它们的中点是 -2，所以我们平移 2：设 $u = v - 2$。于是 $\frac{u}{u+4} = \frac{v-2}{v+2}$，$\mathrm{d}u = \mathrm{d}v$，而积分限 $u = 0, x$ 变成 $v = 2, x+2$。现在以 $x+2$（它大于 2）代替 x 应用第 (i) 部分，便可完成：

$$\int_0^x \sqrt{\frac{u}{u+4}}\,\mathrm{d}u = \int_2^{x+2} \sqrt{\frac{v-2}{v+2}}\,\mathrm{d}v = 2\,\mathrm{f}(\tfrac{1}{2}x+1).$$

第 (iii) 部分

分式中的两个数是 5 和 -1，中点是 2。所以设 $u = v + 2$，则

$$\frac{u-5}{u+1} = \frac{v-3}{v+3},$$

而积分限 $u = 5, x$ 变成 $v = 3, x-2$。接着伸缩 3 倍，设 $v = 3t$，使得 $\frac{v-3}{v+3} = \frac{t-1}{t+1}$ 及 $\mathrm{d}v = 3\,\mathrm{d}t$，积分限为 $t = 1, \frac{1}{3}(x-2)$：

$$\begin{aligned}\int_5^x \sqrt{\frac{u-5}{u+1}}\,\mathrm{d}u &= \int_3^{x-2} \sqrt{\frac{v-3}{v+3}}\,\mathrm{d}v = \int_1^{(x-2)/3} \sqrt{\frac{t-1}{t+1}}\,3\,\mathrm{d}t \\ &= 3\,\mathrm{f}\Big(\frac{x-2}{3}\Big).\end{aligned}$$

由于 $x > 5$，自变量 $\frac{x-2}{3}$ 大于 1，这正是应有的情况。（两个代换可合并为单一代换 $u = 3t + 2$。）

第 (iv) 部分

这个被积函数中完全看不到商的平方根，而且次方也不对：分子是 u^2，根号内是 $u^2 + 4$。

> **想一想** 甚么代换可以把 $u^2 + 4$ 变成第 (ii) 部分中的 $u + 4$?

设 $u^2 = w$，则 $u = \sqrt{w}$（在 $[1,2]$ 上 $u > 0$），且 $\mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}w}{2\sqrt{w}}$。积分限 $u = 1, 2$ 变成 $w = 1, 4$，而

$$\frac{u^2}{\sqrt{u^2+4}}\,\mathrm{d}u = \frac{w}{\sqrt{w+4}} \cdot \frac{\mathrm{d}w}{2\sqrt{w}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{w}}{\sqrt{w+4}}\,\mathrm{d}w = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{w}{w+4}}\,\mathrm{d}w,$$

这正是第 (ii) 部分的被积函数。在 0 处把区间分拆，并两次应用第 (ii) 部分（分别取 $x = 4$ 和 $x = 1$），

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{u^2}{\sqrt{u^2+4}}\,\mathrm{d}u &= \frac{1}{2}\left(\int_0^4 \sqrt{\frac{w}{w+4}}\,\mathrm{d}w - \int_0^1 \sqrt{\frac{w}{w+4}}\,\mathrm{d}w\right) \\ &= \frac{1}{2}\Big(2\,\mathrm{f}(3) - 2\,\mathrm{f}(\tfrac{3}{2})\Big) = \mathrm{f}(3) - \mathrm{f}(\tfrac{3}{2}).\end{aligned}$$

验算

- 每个答案在积分下限处的表现都正确：在 (i) 中取 $x = 2$，得 $2\,\mathrm{f}(1) = 0$；在 (ii) 中取 $x = 0$，得 $2\,\mathrm{f}(1) = 0$；在 (iii) 中取 $x = 5$，得 $3\,\mathrm{f}(1) = 0$。
- 求导是快捷的检验方法。对于 (iii)，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,3\,\mathrm{f}\left(\frac{x-2}{3}\right) = \mathrm{f}'\left(\frac{x-2}{3}\right) = \sqrt{\frac{x-5}{x+1}}$，与预期相符。
- 以数值计算，(iv) 两边都等于 0.91007；而在 (iii) 中取 $x = 11$，两边都等于 3.19704，两者均由直接数值积分（numerical integration）求得。

常见错误

- 忘记 $\mathrm{d}u = k\,\mathrm{d}t$ 带来的因子，结果得出 $\mathrm{f}(\frac{1}{2}x)$ 而非 $2\,\mathrm{f}(\frac{1}{2}x)$。
- 改了被积函数却没有改积分限，尤其是上限——而答案正正就在上限之中。
- 在 (iv) 中只写出 $\frac{1}{2}\cdot 2\,\mathrm{f}(3)$：第 (ii) 部分给出的是由 0 开始的积分，所以必须减去由 0 到 1 的那一段。

STEP 之外

这里的核心想法是：一整族积分其实只是同一个积分，通过不同的仿射变量代换（affine change of variable）$u = at + b$ 去看而已。辨认出隐藏在表达式中的“标准形式”，是大学分析学以及把微分方程（differential equations）化为标准型（canonical forms）时经常用到的技巧。（事实上，利用双曲函数（hyperbolic functions）可以求出 f 的闭式（closed form），但这道题显示，即使不用它也可以走得很远。）关于代换与积分的严谨理论，可参阅 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）；如想找更多同类风格的题目，可参阅 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等数学难题》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。