详细解答

STEP I 2019，第 7 题

纯数学 · 无理性与同余

STEP I 2019，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2019 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP I 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

关键思路

若以最简形式（lowest terms）写成 $\sqrt{2}+\sqrt{3}=a/b$，平方两次便可消去根式（surd），得到一条关于整数 a 和 b 的多项式（polynomial）方程。接著，我们在模（modulo）某个小质数（prime）下考察这条方程。方程迫使该质数要么同时整除 a 和 b，要么两者都不整除。“两者都整除”与最简形式矛盾，而余数则排除了“两者都不整除”的情况。整个技巧的精髓，在于选出一个能令余数真正产生冲突的质数。

解答

第 (i) 部分

步骤 1。每个整数都可写成 $3k$、$3k+1$ 或 $3k-1$（其中 k 为某整数），因此若 $3\nmid a$，则 $a=3k\pm1$。无论哪种情况，

$$a^2=9k^2\pm6k+1=3(3k^2\pm2k)+1,$$

即比 3 的某个倍数大一。

步骤 3。将 $\dfrac{a}{b}=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 平方，得

$$\frac{a^2}{b^2}=2+2\sqrt{6}+3,\qquad\text{故}\qquad a^2-5b^2=2\sqrt{6}\,b^2.$$

现在根式已单独置于一边，再平方一次便可把它消去：

$$a^4-10a^2b^2+25b^4=24b^4,$$
$$a^4+b^4=10a^2b^2,$$

此即所求。（我们只需要这个方向的蕴涵：步骤 2 中的任何 a, b 都必须满足这条方程。）

步骤 4。假设 $3 \mid a$。将步骤 3 的结果移项，

$$b^4 = 10a^2b^2 - a^4 = a^2\,(10b^2 - a^2),$$

而右方可被 3 整除（甚至可被 9 整除）。若 $3 \nmid b$，则由步骤 1 得 $b^2 = 3m + 1$，于是 $b^4 = (b^2)^2 = 9m^2 + 6m + 1$ 不是 3 的倍数，矛盾。因此 $3 \mid b$。

> **想一想** 步骤 4 处理了 $3 \mid a$ 的情况。那么 3 既不整除 a 也不整除 b 的情况又如何？

步骤 5。步骤 3 中的方程对 a 和 b 是对称的，所以把两者的角色互换后，步骤 4 依然成立：若 $3 \mid b$，则 $3 \mid a$。由于 a 和 b 没有大于一的公因数，它们不会同时是 3 的倍数，故由步骤 4，两者都不是 3 的倍数。步骤 2 至 4 并未涵盖这种情况，而这正是步骤 1 派上用场之处。设 $a^2 = 3r + 1$ 及 $b^2 = 3s + 1$。那么 a^4、b^4 和 a^2b^2 都比 3 的某个倍数大一（两个这类数的乘积仍具有此形式）。在模 3 下考察步骤 3 的方程，

$$a^4 + b^4 \equiv 1 + 1 = 2, \qquad 10a^2b^2 \equiv 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \pmod 3,$$

因为 $10 \equiv 1$。步骤 3 中方程两边除以 3 的余数不同，这是不可能的。所以这样的 a 和 b 并不存在。此外，$\sqrt{2} + \sqrt{3} > 0$，所以若它是有理数，便可写成 a, b 均为正数且互质（coprime）的形式。因此 $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ 是无理数（irrational）。

第 (ii) 部分

假设 $\sqrt{6} + \sqrt{7} = a/b$，其中 a, b 为正整数，且没有大于一的公因数。与之前一样，

$$\frac{a^2}{b^2} = 13 + 2\sqrt{42} \quad \Longrightarrow \quad (a^2 - 13b^2)^2 = 168\,b^4,$$

展开得 $a^4 - 26a^2b^2 + 169b^4 = 168b^4$，即

$$a^4 + b^4 = 26a^2b^2.$$

模 5 下的平方数。若 $5 \nmid a$，则 $a = 5k \pm 1$ 或 $a = 5k \pm 2$，从而

$$a^2 = 5(5k^2 \pm 2k) + 1 \qquad 或 \qquad a^2 = 5(5k^2 \pm 4k) + 4.$$

所以 $a^2 \equiv \pm 1 \pmod 5$，因此 $a^4 \equiv 1 \pmod 5$。

整除性。若 $5 \mid a$，则 $b^4 = a^2(26b^2 - a^2)$ 是 5 的倍数。但若 $5 \nmid b$，则 $b^4 \equiv 1 \pmod 5$，所以必有 $5 \mid b$。由对称性，$5 \mid b$ 蕴涵 $5 \mid a$。由于 a 和 b 互质，两者都不能被 5 整除。

矛盾。现在 $a^4 \equiv b^4 \equiv 1$，而 $a^2b^2 \equiv (\pm 1)(\pm 1) = \pm 1 \pmod 5$。由于 $26 \equiv 1$，

$$a^4 + b^4 \equiv 2, \qquad 26a^2b^2 \equiv \pm 1 \pmod 5.$$

但 $2 \not\equiv \pm 1 \pmod 5$，所以方程不可能成立。因此 $\sqrt{6}+\sqrt{7}$ 是无理数。

想一想 若我们在这里尝试用 3 代替 5，哪一步会失效?

为何 3 行不通。论证的前半部分在模 3 下依然成立：若 $3 \mid a$，则 $3 \mid b^4$，故 $3 \mid b$，所以 a 和 b 都不是 3 的倍数。但此时 $a^4 \equiv b^4 \equiv a^2b^2 \equiv 1 \pmod 3$，而由于 $26 \equiv 2 \pmod 3$，

$$a^4 + b^4 \equiv 2 \qquad 及 \qquad 26a^2b^2 \equiv 2 \pmod 3.$$

两边一致，因此没有矛盾。在模 3 下，每一对非 3 的倍数都满足方程 $a^4 + b^4 = 26a^2b^2$，所以单靠被 3 整除的性质无法排除它。（在第 (i) 部分，系数是 $10 \equiv 1$，而 $2 \neq 1$ 造成了冲突。这里系数是 $26 \equiv 2$，所以冲突消失了。）

验算

- 数值上，$x = \sqrt{2}+\sqrt{3} \approx 3.1463$ 使 $x^4 - 10x^2 + 1 \approx 0$（误差约为 10^{-14}）。同样，$y = \sqrt{6}+\sqrt{7} \approx 5.0952$ 使 $y^4 - 26y^2 + 1 \approx 0$。所以这两条四次方程是正确的。
- 逐一尝试每一对余数：$a^4 + b^4 \equiv 10a^2b^2 \pmod 3$ 的唯一解是 $a \equiv b \equiv 0$，而 $a^4 + b^4 \equiv 26a^2b^2 \pmod 5$ 亦然。但 $a^4 + b^4 \equiv 26a^2b^2 \pmod 3$ 还有 $(1,1)$、$(1,2)$、$(2,1)$ 和 $(2,2)$ 这些解。这正是 3 在第 (ii) 部分行不通的原因。
- 电脑搜索显示，不存在满足任一方程且 $a, b \leq 400$ 的互质正整数 a, b。

常见错误

- 在步骤 4 后便停下。步骤 4 只说明 a 和 b 不能是 3 的倍数，你仍需要步骤 1 去处理两者都不是 3 的倍数的情况。
- 未给理由便断言 $3 \mid b^4 \Rightarrow 3 \mid b$。步骤 1 正好提供了理由：若 $3 \nmid b$，则 b^4 的余数是 1。
- 在第 (ii) 部分，忘记了平方数在模 5 下的余数可以是 4（即 -1），所以 a^2b^2 可以 $\equiv \pm 1$，而不只是 1。

STEP 之外

数 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 是 $x^4 - 10x^2 + 1$ 的根，而这里的论证实际上是在证明这个多项式没有有理根。有理根定理（rational root theorem）提供了一条更快的途径：任何有理根都必须是 ± 1，而两者都不成立。把多项式在模某个质数下约化，借此证明它没有根或因式，是大学一年级代数中的标准工具（例如用于不可约性（irreducibility）检验）。有趣的是，尽管 $x^4 - 10x^2 + 1$ 在有理数上不可约，它在模每一个质数下却都可以因式分解，这是一个著

名的例子。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《环、域与群》）进一步发展了这些概念，而 Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算术》）则是一本关于同余（congruences）的精彩入门书。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。