详细解答

STEP I 2019，第 6 题

纯数学 · 不等式与界限

STEP I 2019，第 6 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2019 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP I 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

关键思路

每条方程直接求解看来都无从入手，但可以把它拆成“某式 = 另一式”的形式，其中左边永远不会小于某个数，而右边永远不会大于同一个数。于是方程只在两边都恰好等于那个数时才成立，而这两个条件各自都很容易求解。每一部分前面的小题，正是为了建立这两个界（bound）。

解答

第 (i) 部分

配方（completing the square），

$$\begin{aligned} 9x^2 - 12x\cos\theta + 4 &= (3x - 2\cos\theta)^2 - 4\cos^2\theta + 4 \\ &= (3x - 2\cos\theta)^2 + 4\sin^2\theta. \end{aligned}$$

平方数永不为负，所以最小值是 $4\sin^2\theta$，当且仅当 $x = \frac{2}{3}\cos\theta$ 时取得。

把这个四次式（quartic）看成 x^2 的二次式（quadratic），

$$12x^2\sin\theta - 9x^4 = -(3x^2 - 2\sin\theta)^2 + 4\sin^2\theta.$$

所以 $12x^2\sin\theta - 9x^4 \le 4\sin^2\theta$，当且仅当 $x^2 = \frac{2}{3}\sin\theta$ 时取等号。由于 $0 < \theta < \pi$，我们有 $\sin\theta > 0$，所以 x^2 确实可以取这个值，而最大值是 $4\sin^2\theta$。

现在把所给方程中的 x^2 项拆成 $9x^2 - 12x^2\sin\theta$，再移项整理：

$$\underbrace{9x^2 - 12x\cos\theta + 4}_{\ge 4\sin^2\theta} = \underbrace{12x^2\sin\theta - 9x^4}_{\le 4\sin^2\theta}.$$

想一想 一个至少是 $4\sin^2\theta$ 的量，怎样才能等于一个至多是 $4\sin^2\theta$ 的量?

只有两者都等于 $4\sin^2\theta$ 才行。所以方程成立当且仅当同时有

$$x = \tfrac{2}{3}\cos\theta \qquad 和 \qquad x^2 = \tfrac{2}{3}\sin\theta.$$

消去 x：$\frac{4}{9}\cos^2\theta = \frac{2}{3}\sin\theta$，所以 $2\cos^2\theta = 3\sin\theta$，即 $2 - 2\sin^2\theta = 3\sin\theta$。因此

$$2\sin^2\theta + 3\sin\theta - 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (2\sin\theta - 1)(\sin\theta + 2) = 0.$$

由于 $\sin\theta \neq -2$，得 $\sin\theta = \frac{1}{2}$，所以 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 或 $\theta = \frac{5\pi}{6}$。再由 $x = \frac{2}{3}\cos\theta$ 分别得 $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 或 $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$，而两种情况下都有 $x^2 = \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\sin\theta$，符合要求。解为

$$(x,\theta) = \left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{\pi}{6}\right) \quad 和 \quad (x,\theta) = \left(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{5\pi}{6}\right).$$

第 (ii) 部分

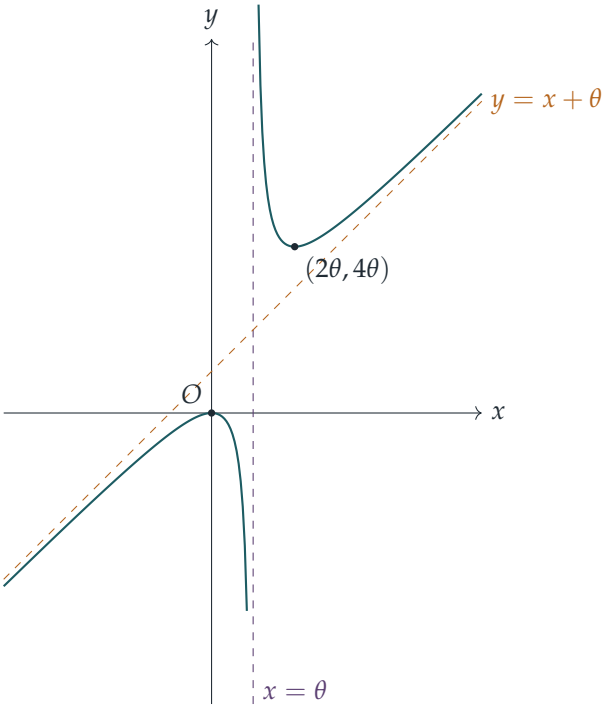
草图。这里 $\theta > 0$。曲线 $y = \dfrac{x^2}{x-\theta}$ 经过原点（而且不在其他地方与坐标轴相交），并有铅垂渐近线（vertical asymptote）$x = \theta$。作除法，

$$\frac{x^2}{x-\theta} = x + \theta + \frac{\theta^2}{x-\theta},$$

所以 $y = x + \theta$ 是一条斜渐近线（oblique asymptote）；当 $x > \theta$ 时曲线在它上方，当 $x < \theta$ 时曲线在它下方。用商法则（quotient rule）求导，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2x(x-\theta) - x^2}{(x-\theta)^2} = \frac{x(x-2\theta)}{(x-\theta)^2},$$

所以驻点（stationary point）是局部极大点 $(0,0)$ 和局部极小点 $(2\theta, 4\theta)$（斜率在 $x = 0$ 处由 $+$ 变为 $-$，在 $x = 2\theta$ 处由 $-$ 变为 $+$）。



推论。若 $x < \theta$，分子 $x^2 \geq 0$ 而分母为负，所以 $y \leq 0$。若 $x > \theta$，该分支的最低点是 $(2\theta, 4\theta)$，所以 $y \geq 4\theta$。用代数方法说明：当 $x > \theta$ 时，

$$x^2 - 4\theta(x-\theta) = (x-2\theta)^2 \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{x^2}{x-\theta} \geq 4\theta,$$

这里除以了正数 $x - \theta$。所以曲线永远不会取严格介乎 0 与 4θ 之间的值。

三角函数的界。分子满足 $\sin^2\theta\cos^2 x \leq 1 \cdot 1 = 1$，分母满足 $1 + \cos^2\theta\sin^2 x \geq 1$。一个至多为 1 的数除以一个至少为 1（且为正）的数，结果至多为 1：

$$\frac{\sin^2\theta\cos^2 x}{1+\cos^2\theta\sin^2 x} \leq 1.$$

要取等号，必须同时有 $\sin^2\theta\cos^2 x = 1$ 和 $\cos^2\theta\sin^2 x = 0$。另外留意这个分式 ≥ 0，因为它是平方数除以正数。

最后的方程。记 $L = \dfrac{x^2}{4\theta(x-\theta)}$，并以 R 表示右边。把前面的结果除以 $4\theta > 0$，得 $L \leq 0$ 或 $L \geq 1$。但 $0 \leq R \leq 1$。

> ? **想一想** 一个 ≤ 0 或 ≥ 1 的数，能在哪里与 $[0,1]$ 中的数相等?

只能在 0 或 1。所以我们需要 $L = R = 0$ 或 $L = R = 1$。

▶ $L = 0$ 迫使 $x = 0$，但这时 $R = \sin^2\theta > 0$，因为 $0 < \theta < \pi$。无解。

- $L=1$ 表示 $x^2=4\theta(x-\theta)$，即 $(x-2\theta)^2=0$，所以 $x=2\theta$。$R=1$ 需要 $\sin^2\theta\cos^2 x=1$，这迫使 $\sin^2\theta=1$ 和 $\cos^2 x=1$。由于 $0<\theta<\pi$，得 $\theta=\frac{\pi}{2}$，所以 $x=\pi$，而且确实有 $\cos^2\pi=1$ 和 $\cos^2\theta\sin^2 x=0$。

唯一的解是 $x=\pi$，$\theta=\frac{\pi}{2}$。

验算

- 把 $x=\frac{1}{\sqrt{3}},\theta=\frac{\pi}{6}$ 代入四次方程：$9\cdot\frac{1}{9}+(9-6)\cdot\frac{1}{3}-12\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+4=1+1-6+4=0$。
- 在最后的方程中取 $x=\pi$，$\theta=\frac{\pi}{2}$：$L=\pi^2/(2\pi\cdot\frac{\pi}{2})=1$，而 $R=1\cdot 1/(1+0)=1$。
- 用电脑在 (x,θ) 的细密网格上搜索，两条方程都没有找到其他近似解，只有在被排除的端点 $\theta\to 0$ 和 $\theta\to\pi$ 附近出现一些虚假的近似解（那里 $\sin\theta\to 0$，两个界都失效）。

常见错误

- 求得 $\sin\theta=\frac{1}{2}$ 就停下来：x 必须满足 $x=\frac{2}{3}\cos\theta$，这对每个 θ 都确定了 x 的正负号，所以 $(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{5\pi}{6})$ 不是解。
- 在最后一部分忘记考虑 $L=R=0$ 的情况；这个情况必须排除，而它之所以能被排除，只是因为 $\sin\theta\neq 0$。
- 声称分式 ≤ 1“因为 $\sin^2$ 和 $\cos^2$ 都不超过 1”，却没有说明为何分母不会破坏这个结论。

STEP 之外

把一条方程夹在一个下界和一个上界之间、而两者只在单一值相遇，这个技巧是分析学（analysis）的常用手法：证明 AM–GM（算术–几何平均）不等式或柯西–施瓦茨（Cauchy–Schwarz）不等式何时取等号，就是这样做的；夹逼定理（squeeze theorem）确定极限，也是靠这个道理。学会问“这个不等式何时取等号?”，往往是找到解法的捷径。想看更多同类思路，可参阅 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析学》），或 Siklos 的习题集 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等数学难题》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。