详细解答

STEP I 2019，第 5 题

纯数学 · 三维向量

STEP I 2019，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2019 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP I 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

关键思路

两个向量（vector）相等，当且仅当它们的分量（component）全部相同，因此题中每个几何条件都可化为关于 p、q、r 和 s 的几条简单方程。四点共面（coplanar）等价于纯量三重积（scalar triple product）（即一个 3×3 行列式（determinant））等于零。把条件用坐标写出后，每一部分都只是简短的代数运算。

解答

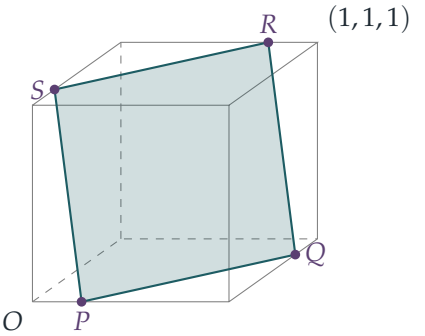
第 (i) 部分

若 $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{SR}$,则对边 PQ 与 SR 平行且等长,所以 $PQRS$ 是**平行四边形**(parallelogram)。(此时由 $\overrightarrow{PS}=\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}-\overrightarrow{SR}$ 亦得 $\overrightarrow{PS}=\overrightarrow{QR}$。)

若同时有 $|\overrightarrow{PQ}|=|\overrightarrow{PS}|$，则平行四边形的两条邻边相等，因而四条边全部相等：$PQRS$ 是**菱形**（rhombus）。

第 (ii) 部分：共面条件

各点位于单位立方体（unit cube）的棱上，所以 $p,q,r,s\in[0,1]$。这里 P 和 Q 位于面 $z=0$ 上，而 R 和 S 位于面 $z=1$ 上。



四点共面，当且仅当 $\overrightarrow{PQ}$、$\overrightarrow{PS}$ 和 $\overrightarrow{PR}$ 线性相关（linearly dependent），亦即它们的纯量三重积为零。由

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1-p \\ q \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{PS} = \begin{pmatrix} -p \\ s \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} r-p \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

沿第一行展开行列式，得

$$\begin{vmatrix} 1-p & q & 0 \\ -p & s & 1 \\ r-p & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1-p)(s-1) - q(-p-(r-p)) + 0$$
$$= (1-p)(s-1) + qr.$$

令其等于零，即得 $rq = (1-s)(1-p)$，正是所求。

如果你想避开行列式，可把经过 P、Q、R 的平面写成 $\overrightarrow{OP} + \lambda\overrightarrow{PQ} + \mu\overrightarrow{PR}$，其上的点为

$$(p + \lambda(1-p) + \mu(r-p),\ \lambda q + \mu,\ \mu).$$

要 $S = (0, s, 1)$ 在此平面上，由 z 分量需 $\mu = 1$，再由 y 分量得 $\lambda q = s - 1$，由 x 分量得 $r + \lambda(1-p) = 0$。把最后一条方程乘以 q 并代入，得 $rq + (s-1)(1-p) = 0$，即同一条件。（这里用到 P、Q、R 不共线（collinear），这是成立的，因为 R 在顶面，而 P、Q 在底面。）

第 (ii)(a) 部分

我们有

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1-p \\ q \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{SR} = \begin{pmatrix} r \\ 1-s \\ 0 \end{pmatrix}.$$

两者的 z 分量已经相同，所以

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR} \iff r = 1 - p \text{ 且 } q = 1 - s \iff p + r = 1 \text{ 且 } q + s = 1.$$

形心（centroid）为

$$\tfrac{1}{4}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{OS}) = \tfrac{1}{4}\begin{pmatrix} p+1+r \\ q+1+s \\ 2 \end{pmatrix},$$

而立方体的中心是 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$。第三个分量总是相同，所以形心位于中心当且仅当 $p+1+r = 2$ 且 $q+1+s = 2$，这正是同样的两个条件 $p+r=1$、$q+s=1$。因此两个命题等价。

（留意当 $r = 1-p$ 且 $s = 1-q$ 时，共面条件 $rq = (1-s)(1-p)$ 变成 $(1-p)q = q(1-p)$，自动成立：没有任何位置被排除。）

第 (ii)(b) 部分

由 (a)，$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$ 给出 $r = 1-p$ 及 $s = 1-q$。对于第二个条件，比较长度的平方，并利用 $\overrightarrow{PS} = (-p, s, 1)$ 及 $s = 1-q$：

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{PQ}|^2 = |\overrightarrow{PS}|^2 &\iff (1-p)^2 + q^2 = p^2 + (1-q)^2 + 1 \\ &\iff 1 - 2p = 2 - 2q \\ &\iff q = p + \tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

所以

$$q = p + \tfrac{1}{2}, \qquad r = 1 - p, \qquad s = \tfrac{1}{2} - p.$$

由于 $q \le 1$ 及 $s \ge 0$，只有当 $0 \le p \le \frac{1}{2}$ 时各点才位于棱上。

> ? **想一想** 哪两个向量给出角 PQR?

在 Q 处的角是 $\overrightarrow{QP}$ 与 $\overrightarrow{QR}$ 之间的夹角（两者都背离 Q）。利用刚求得的值，

$$\overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} p-1 \\ -p-\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} r-1 \\ 1-q \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p \\ \frac{1}{2}-p \\ 1 \end{pmatrix}.$$

于是

$$\begin{aligned} \overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR} &= -p(p-1) - (p+\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2}-p) = p - p^2 - (\tfrac{1}{4} - p^2) = p - \tfrac{1}{4}, \\ |\overrightarrow{QP}|^2 &= (1-p)^2 + (p+\tfrac{1}{2})^2 = 2p^2 - p + \tfrac{5}{4}, \\ |\overrightarrow{QR}|^2 &= p^2 + (\tfrac{1}{2}-p)^2 + 1 = 2p^2 - p + \tfrac{5}{4}. \end{aligned}$$

两个长度相等，这正是菱形应有的性质，所以

$$\cos PQR = \frac{p-\frac{1}{4}}{2p^2-p+\frac{5}{4}} = \frac{4p-1}{5-4p+8p^2},$$

这是把分子分母同乘以 4 所得。这就是所求的结果。

正方形。 菱形是正方形，当且仅当它的角都是直角，即 $\cos PQR = 0$。分母 $8p^2-4p+5 = 8(p-\frac{1}{4})^2+\frac{9}{2}$ 恒为正，所以这只在 $4p-1=0$ 时发生：

$$p=\tfrac{1}{4}, \qquad q=\tfrac{3}{4}, \qquad r=\tfrac{3}{4}, \qquad s=\tfrac{1}{4}.$$

此时边长的平方为

$$2\cdot\tfrac{1}{16}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{5}{4}=\tfrac{9}{8},$$

所以每条边的长度为 $\sqrt{9/8}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$。要与 $\frac{21}{20}$ 比较，可比较这两个正数的平方：

$$\left(\tfrac{21}{20}\right)^2 = \tfrac{441}{400} < \tfrac{450}{400} = \tfrac{9}{8}.$$

因此正方形的边长大于 $\frac{21}{20}$。（实际上约为 1.0607。）

验算

- 当 $p=\frac{1}{4}$ 时，四点为 $(\frac{1}{4},0,0)$、$(1,\frac{3}{4},0)$、$(\frac{3}{4},1,1)$、$(0,\frac{1}{4},1)$；它们的平均值是 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，与 (a) 的预测一致，而直接计算亦得 $\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QR}=\frac{3}{16}-\frac{3}{16}=0$。
- 当 $p=0$ 时，公式给出 $\cos PQR=-\frac{1}{5}$。直接计算：$\overrightarrow{QP}=(-1,-\frac{1}{2},0)$，$\overrightarrow{QR}=(0,\frac{1}{2},1)$，点积（dot product）为 $-\frac{1}{4}$，长度平方均为 $\frac{5}{4}$，所以 $\cos PQR=-\frac{1}{5}$。✓
- 共面恒等式、(a) 中的等价关系及 $\cos PQR$ 的公式，均已用电脑以精确算术在大量随机数值上验证。

常见错误

- 用 $\overrightarrow{QP}$ 和 $\overrightarrow{RQ}$（一个指向 Q，一个背离 Q）求在 Q 处的角：这会令余弦的符号相反。
- 弄错字母次序：$\overrightarrow{SR}$ 是 $R-S$，不是 $S-R$。
- 单凭计算机数值就断言 $\frac{3\sqrt{2}}{4}>\frac{21}{20}$，而没有作精确比较；由于两者都是正数，把两边平方可以保持论证严谨。

STEP 之外

用行列式判断共面，是一个一般事实在三维的特例：一组向量线性相关，当且仅当由它们组成的矩阵（matrix）的行列式为零。立方体的平面截面也是丰富的例子来源（经过中心并垂直于一条体对角线的平面，截出一个正六边形（regular hexagon））。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《线性代数导论》）正是从这种几何观点出发，发展行列式、体积与线性相关的理论。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。