详细解答

STEP I 2019，第 4 题

纯数学 · 四次方程的因式分解

STEP I 2019，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2019 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP I 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

关键思路

没有 x^3 项的四次多项式（quartic），其各根（roots）之和为零。因此，若把四个根分成两对，两对各自的和互为相反数，这正是两个二次因式（quadratic factors）的 x 系数分别为 s 和 $-s$ 的原因。接着比较系数（comparing coefficients）得出三条方程，消去 p 和 q 后便剩下一个关于 s^2 的三次方程（cubic）。第 (i) 部分是为了处理最后一步的根式（surds）而设。

解答

第 (i) 部分

把 $m+n\sqrt{2}$ 平方得 $m^2+2n^2+2mn\sqrt{2}$，所以我们需要 $m^2+2n^2=3$ 及 $mn=1$。取 $m=n=1$ 即可：

$$(1+\sqrt{2})^2=1+2\sqrt{2}+2=3+2\sqrt{2},$$

而由于 $1+\sqrt{2}>0$，它就是正平方根。因此 $m=1$，$n=1$：

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}.$$

同理，$(\sqrt{2}-1)^2=3-2\sqrt{2}$，所以 $\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$。两个结果我们都会用到。

第 (ii) 部分

为何存在这样的因式分解。设四个实根为 a、b、c、d，则 $\mathrm{f}(x)=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$。f 中 x^3 的系数是 $-(a+b+c+d)$，而它等于零，所以 $c+d=-(a+b)$。把根两两配对，

$$\mathrm{f}(x)=(x^2-(a+b)x+ab)(x^2-(c+d)x+cd)=(x^2+sx+p)(x^2-sx+q),$$

其中 $s=-(a+b)$、$p=ab$、$q=cd$，由于各根皆为实数，它们全都是实数。

三条方程。展开，

$$(x^2+sx+p)(x^2-sx+q)=x^4+(p+q-s^2)x^2+s(q-p)x+pq.$$

与 $x^4-10x^2+12x-2$ 比较：

$$\begin{aligned} p+q-s^2&=-10,\\ s(q-p)&=12,\\ pq&=-2. \end{aligned}$$

关于 s 的方程。第二条方程显示 $s\neq 0$，所以可以除以 s：$q-p=12/s$。第一条方程给出 $p+q=s^2-10$。现在利用恒等式 $(p+q)^2-(q-p)^2=4pq=-8$：

$$(s^2-10)^2-\frac{144}{s^2}=-8.$$

两边乘以 s^2（它不为零）得

$$s^2(s^2-10)^2+8s^2-144=0,$$

此即所求。

s^2 的值。设 $u=s^2$。展开，

$$u(u-10)^2+8u-144=u^3-20u^2+108u-144.$$

试代入 144 的较小因数，$u=2$ 给出 $8-80+216-144=0$，所以 $u-2$ 是一个因式，并且

$$u^3-20u^2+108u-144=(u-2)(u^2-18u+72)=(u-2)(u-6)(u-12).$$

所以 s^2 的三个可能值为 $s^2=2$、6 及 12。

> ? **想一想** 我们只需要一种因式分解，为甚么 s^2 却有三个值?

把四个根分成两对共有三种方法，而每一种配对都给出各自的一对二次因式，且 $s^2=(a+b)^2$。用任何一种都可以解方程；取最小的值只是令根式最整洁。

解 $\mathrm{f}(x)=0$。取 $s^2=2$ 及 $s=\sqrt{2}$（选 $s=-\sqrt{2}$ 只会把两个因式对调）。于是

$$p+q=2-10=-8,\qquad q-p=\frac{12}{\sqrt{2}}=6\sqrt{2},$$

所以 $p=-4-3\sqrt{2}$，$q=-4+3\sqrt{2}$。（验证：$pq=16-18=-2$。）因此

$$\mathrm{f}(x)=(x^2+\sqrt{2}\,x-4-3\sqrt{2})(x^2-\sqrt{2}\,x-4+3\sqrt{2}).$$

第一个因式的判别式（discriminant）为

$$2+4(4+3\sqrt{2})=18+12\sqrt{2}=6(3+2\sqrt{2})=6(1+\sqrt{2})^2,$$

这里用了第 (i) 部分的结果，所以其平方根为 $\sqrt{6}(1+\sqrt{2})=\sqrt{6}+2\sqrt{3}$。其根为

$$x=\frac{-\sqrt{2}\pm(\sqrt{6}+2\sqrt{3})}{2}.$$

第二个因式的判别式为

$$2-4(-4+3\sqrt{2})=18-12\sqrt{2}=6(3-2\sqrt{2})=6(\sqrt{2}-1)^2,$$

其平方根为 $\sqrt{6}(\sqrt{2}-1)=2\sqrt{3}-\sqrt{6}$（为正数，因为 $2\sqrt{3}=\sqrt{12}>\sqrt{6}$）。其根为

$$x=\frac{\sqrt{2}\pm(2\sqrt{3}-\sqrt{6})}{2}.$$

所以 $\mathrm{f}(x)=0$ 的四个解为

$$x=\tfrac{1}{2}(-\sqrt{2}+\sqrt{6}+2\sqrt{3}),\qquad x=\tfrac{1}{2}(-\sqrt{2}-\sqrt{6}-2\sqrt{3}),$$
$$x=\tfrac{1}{2}(\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{6}),\qquad x=\tfrac{1}{2}(\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{6}).$$

验算

- 各根的数值约为 2.2497、-3.6639、1.2144 及 0.1998。它们之和为 0，正如没有 x^3 项所要求的；它们之积约为 -2，即常数项。
- 代入 $x\approx 0.1998$：$x^4-10x^2+12x-2\approx 0.0016-0.3992+2.3976-2\approx 0$。
- f 的变号情况吻合：$\mathrm{f}(0)=-2$，$\mathrm{f}(1)=1$，$\mathrm{f}(2)=-2$，$\mathrm{f}(3)=25$，$\mathrm{f}(-4)=46$，所以 $(-4,0)$、$(0,1)$、$(1,2)$ 及 $(2,3)$ 各有一个根。

常见错误

- 没有解释为何 x 系数是 s 和 $-s$：这源于 x^3 的系数为零，即各根之和为零。
- 除以 s 之前忘记指出 $s\neq 0$。
- 把根写成 $\sqrt{18\pm 12\sqrt{2}}$ 便停下：题目要求完全化简，而这正是第 (i) 部分的用途。

STEP 之外

这其实是经过包装的费拉里（Ferrari）四次方程解法：关于 s^2 的三次方程就是预解三次式（resolvent cubic），它的三个根对应把四个根两两配对的三种方法。为何四次方程可以

化为三次方程, 而一般的五次方程（quintic）却根本无法用根式求解（solved by radicals），正是伽罗瓦理论（Galois theory）的主题；这套理论把方程的可解性与其根的对称性联系起来。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《环、域与群》）是大学一年级迈向这个理论的好途径。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。