详细解答

STEP I 2019，第 3 题

纯数学 · 积分法

STEP I 2019，第 3 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2019 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP I 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

关键思路

把分子和分母同乘以 $1-\sin x$，就能把 $1+\sin x$ 变成 $1-\sin^2 x=\cos^2 x$，而分母是 $\cos x$ 的幂的式子，都可以拆成几个标准部分：$\sec^2 x$、$\sec x\tan x$、$\tan^2 x\sec^2 x$ 和 $\sin x/\cos^4 x$，每一个都可以一眼看出其积分（integral）。另外两个积分其实是同一招的变奏：第二个积分会变成含 $1+\cos x$ 的积分，再用代换（substitution）$x=\frac{1}{2}\pi-u$ 便化为第一类；第三个积分则把因子 $1-\sin x$ 平方。

解答

第一个积分

由于 $(1+\sin x)(1-\sin x)=1-\sin^2 x=\cos^2 x$，

$$\frac{1}{1+\sin x}=\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}=\sec^2 x-\sec x\tan x.$$

我们知道 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan x=\sec^2 x$ 及 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sec x=\sec x\tan x$，所以

$$\int\frac{1}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x=\tan x-\sec x+C. \qquad (*)$$

利用 $\tan\frac{1}{4}\pi=1$、$\sec\frac{1}{4}\pi=\sqrt{2}$、$\tan 0=0$ 及 $\sec 0=1$：

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi}\frac{1}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x=(1-\sqrt{2})-(0-1)=2-\sqrt{2}.$$

（乘以 $1-\sin x$ 是可以的，因为在整个区间内 $\sin x<1$，所以我们从不会乘以零。）

第二个积分

把分子和分母同乘以 $\cos x$（在 $[\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{3}\pi]$ 上不为零），

$$\frac{1}{1+\sec x} = \frac{\cos x}{\cos x + 1} = 1 - \frac{1}{1+\cos x}.$$

想一想 怎样才能把 $(*)$ 用在 $\dfrac{1}{1+\cos x}$ 上?

由于 $\cos x = \sin(\frac{1}{2}\pi - x)$，代入 $u = \frac{1}{2}\pi - x$，于是 $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u$；当 $x = \frac{1}{4}\pi$ 时，$u = \frac{1}{4}\pi$；当 $x = \frac{1}{3}\pi$ 时，$u = \frac{1}{6}\pi$。于是

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \frac{1}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} \frac{1}{1+\sin u}\,\mathrm{d}u &= \Big[\tan u - \sec u\Big]_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} \\ &= (1-\sqrt{2}) - \Big(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}}\Big) = 1 - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{3}},\end{aligned}$$

这里用了 $\tan\frac{1}{6}\pi = 1/\sqrt{3}$ 及 $\sec\frac{1}{6}\pi = 2/\sqrt{3}$。区间长度为 $\frac{1}{3}\pi - \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{12}\pi$，所以

$$\int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \frac{1}{1+\sec x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{12} - \Big(1 - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\Big) = \frac{\pi}{12} + \sqrt{2} - 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

（同样地，也可以把 $\frac{1}{1+\cos x}$ 乘以 $\frac{1-\cos x}{1-\cos x}$，得到 $\operatorname{cosec}^2 x - \cot x \operatorname{cosec} x$，其原函数（antiderivative）为 $\operatorname{cosec} x - \cot x = \tan\frac{1}{2}x$；由于 $\tan\frac{1}{8}\pi = \sqrt{2} - 1$，这会得出相同的答案。）

第三个积分

现在把分子和分母同乘以 $(1-\sin x)^2$，使分母变成 $\cos^4 x$：

$$\frac{1}{(1+\sin x)^2} = \frac{(1-\sin x)^2}{\cos^4 x} = \frac{1+\sin^2 x}{\cos^4 x} - \frac{2\sin x}{\cos^4 x}.$$

对于第一部分，在分子中写 $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$：

$$\frac{1+\sin^2 x}{\cos^4 x} = \frac{\cos^2 x + 2\sin^2 x}{\cos^4 x} = \sec^2 x + 2\tan^2 x \sec^2 x.$$

想一想 $\tan^2 x \sec^2 x$ 和 $\sin x / \cos^4 x$ 的积分分别是甚么?

两者都是 $f(x)^n f'(x)$ 的形式。取 $f = \tan x$，有 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan^3 x = 3\tan^2 x \sec^2 x$；取 $f = \cos x$，有 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x)^{-3} = 3\sin x\,(\cos x)^{-4}$。因此

$$\int \frac{1}{(1+\sin x)^2}\,\mathrm{d}x = \tan x + \tfrac{2}{3}\tan^3 x - \tfrac{2}{3}\sec^3 x + C.$$

当 $x=\frac{1}{4}\pi$ 时：$\tan=1$ 而 $\sec^3=(\sqrt{2})^3=2\sqrt{2}$，得 $1+\frac{2}{3}-\frac{4}{3}\sqrt{2}$。当 $x=0$ 时：$0+0-\frac{2}{3}$。所以

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi}\frac{1}{(1+\sin x)^2}\,\mathrm{d}x=\frac{5}{3}-\frac{4\sqrt{2}}{3}+\frac{2}{3}=\frac{7-4\sqrt{2}}{3}.$$

验算

- 大小：在 $[0,\frac{1}{4}\pi]$ 上，第一个被积函数（integrand）由 1 递减至 $2-\sqrt{2}\approx 0.59$，所以积分值介乎 0.46 与 0.79 之间；$2-\sqrt{2}\approx 0.586$ 符合。同样，第三个被积函数是第一个的平方，所以其积分应该较小：$(7-4\sqrt{2})/3\approx 0.448$。
- 把你的原函数求导：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\tan x-\sec x)=\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}=\frac{1}{1+\sin x}$。
- 辛普森法则（Simpson's rule）给出三个积分的值为 0.585786、0.098663 及 0.447715，与 $2-\sqrt{2}$、$\frac{\pi}{12}+\sqrt{2}-1-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 及 $\frac{1}{3}(7-4\sqrt{2})$ 准确至十位小数。

常见错误

- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sec x$ 或 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sec^3 x$ 的正负号出错:两者都带正号,因为 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x)^{-n}=n\sin x(\cos x)^{-n-1}$。
- 在第一和第三个积分中忘记下限：$\sec 0=1$，不是 0。
- 代换 $u=\frac{1}{2}\pi-x$ 后错误地对调上下限：$\mathrm{d}x=-\mathrm{d}u$ 中的负号正是用来把上下限调回递增次序的。

STEP 之外

乘以“共轭”（conjugate）这个技巧，其实是一个系统方法的特例：代换 $t=\tan\frac{1}{2}x$ 能把任何 $\sin x$ 与 $\cos x$ 的有理函数（rational function）变成 t 的有理函数，然后便可用部分分式（partial fractions）求积分。（我们得到 $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x}$ 的答案是 $\tan\frac{1}{2}x$，正好透露了这一点。）大学一年级的分析（analysis）课程还会探讨这类积分在甚么情况下才存在，例如在 $x=-\frac{1}{2}\pi$ 附近，$1+\sin x$ 等于零。关于这两个概念，可参阅 Bartle 与 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis*（《实分析导论》）；如想做更多同类风格的积分，可参阅 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《数学进阶问题》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。