详细解答

STEP I 2019，第 2 题

纯数学 · 参数曲线的切线

STEP I 2019，第 2 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2019 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP I 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

关键思路

这个参数化（parametrisation）的设计，使参数 t 处的斜率（gradient）恰好就是 t，因此每条切线（tangent line）的方程都非常简洁。要找两条切线的交点，只需把立方差（difference of cubes）因式分解（factorise）；而垂直（perpendicular）条件 $pq = -1$ 让我们可以把所有式子改写成以和 $p + q$ 表示。至于两条曲线的公共点，把其中一个参数化代入另一条曲线，会得到一个带有重根（repeated root）的多项式（polynomial），而这个重根正透露了某种几何信息。

解答

切线

设 $x = 3t^2$ 及 $y = 2t^3$，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} = \frac{6t^2}{6t} = t \qquad (t \neq 0).$$

所以在 $(3p^2, 2p^3)$ 处的切线斜率为 p，方程为

$$y - 2p^3 = p\,(x - 3p^2) \quad \Longrightarrow \quad y = px - 3p^3 + 2p^3 = px - p^3,$$

与所求相符。（当 $p = 0$ 时，该点是原点，是一个尖点（cusp）；在该处曲线为 $y = \pm 2(x/3)^{3/2}$，它与 x 轴 $y = 0$ 相切，所以公式仍然成立。）

两条切线的交点

当 $p \neq q$ 时，切线 $y = px - p^3$ 与 $y = qx - q^3$ 的交点满足

$$(p-q)\,x = p^3 - q^3 = (p-q)(p^2+pq+q^2).$$

由于 $p \neq q$，可以两边除以 $p-q$，得 $x = p^2+pq+q^2$，于是

$$y = px - p^3 = p^3 + p^2q + pq^2 - p^3 = pq(p+q).$$

所以两条切线相交于

$$(p^2+pq+q^2,\ pq(p+q)).$$

两条切线的斜率分别为 p 和 q，所以它们互相垂直当且仅当 $pq = -1$。设 $u = p+q$，则 $p^2+pq+q^2 = (p+q)^2 - pq = u^2+1$，且 $pq(p+q) = -u$。因此两条互相垂直的切线相交于 $(u^2+1,\ -u)$，与所求相符。

想一想 $\widetilde{C}$ 上的每一点，是否真的都来自一对互相垂直的切线?

是的：对任意实数 u，我们需要 $p+q = u$ 及 $pq = -1$，所以 p 和 q 是 $z^2 - uz - 1 = 0$ 的根。其判别式（discriminant）u^2+4 恒为正，所以总有两个相异实根。因此 $\widetilde{C}$ 恰好就是所有可以向 C 作两条互相垂直切线的点所组成的集合。

两条曲线的公共点

消去参数后，$\widetilde{C}$ 是抛物线（parabola）$x = y^2+1$。C 上的点 $(3t^2, 2t^3)$ 位于其上当且仅当

$$3t^2 = 4t^6 + 1 \quad\Longleftrightarrow\quad 4s^3 - 3s + 1 = 0, \quad \text{其中} s = t^2.$$

由于 $s = -1$ 是一个根，可以因式分解：

$$4s^3 - 3s + 1 = (s+1)(4s^2 - 4s + 1) = (s+1)(2s-1)^2.$$

因为 $s = t^2 \geq 0$，唯一可能是 $s = \frac{1}{2}$，所以 $t = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$。于是 $x = 3t^2 = \frac{3}{2}$，$y = 2t^3 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$。公共点为

$$\left(\tfrac{3}{2},\ \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{及} \quad \left(\tfrac{3}{2},\ -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

想一想 重复因式 $(2s-1)^2$ 告诉了我们甚么?

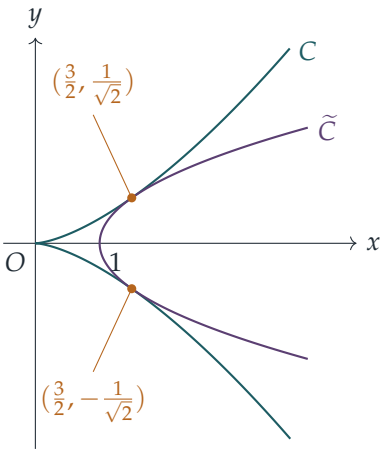
重根通常意味着相切（tangency），这里正是如此。在 $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 处，C 的斜率为 $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$。在 $\widetilde{C}$ 上，由 $x = y^2+1$ 得 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2/\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$，数值相同。由对称性，下方那一点亦然。所以两条曲线在这两点都只是相切，而不是相交穿过。

草图

从 C 消去 t，得 $y^2 = \frac{4}{27}x^3$，其中 $x \geq 0$。这是一条半立方抛物线（semicubical parabola），关于 x 轴对称，在原点有一个指向左方的尖点。$\widetilde{C}$ 是抛物线 $y^2 = x - 1$，顶点（vertex）为 $(1, 0)$，开口向右。要判断哪条曲线在外，可比较 $x \geq 1$ 时两者 y^2 的值：

$$f(x) = \tfrac{4}{27}x^3 - (x-1), \qquad f'(x) = \tfrac{4}{9}x^2 - 1,$$

所以 f 在 $x \geq 1$ 上的最小值出现在 $x = \frac{3}{2}$，此时 $f(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$。因此 $f(x) \geq 0$，且等号只在 $x = \frac{3}{2}$ 时成立。所以 $\widetilde{C}$ 位于 C 的内侧（较接近 x 轴），并在两个公共点与 C 相切。



验算

- 取 $p = 1$，$q = -1$（于是 $pq = -1$，$u = 0$）。切线为 $y = x - 1$ 及 $y = -x + 1$，两者互相垂直，相交于 $(1, 0)$，即 $\widetilde{C}$ 的顶点，与 $(u^2 + 1, -u)$ 的预测一致。
- 取 $p = 2$, $q = -\frac{1}{2}$, 于是 $u = \frac{3}{2}$。切线 $y = 2x - 8$ 与 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{8}$ 的交点满足 $\frac{5}{2}x = \frac{65}{8}$，所以 $x = \frac{13}{4} = u^2 + 1$，$y = -\frac{3}{2} = -u$。
- 点 $(1.5,\ 0.7071)$ 同时满足 $y^2 = \frac{4}{27}x^3$（因为 $\frac{4}{27} \cdot \frac{27}{8} = \frac{1}{2}$）及 $y^2 = x - 1$。电脑验算亦确认 $3t^2 - 4t^6 - 1$ 从不大于零，所以没有其他公共点。

常见错误

- 忘记 $s = t^2$ 不可能是负数，而尝试使用根 $s = -1$。
- 把抛物线画成在公共点穿过 C，而不是在该处与 C 相切。

STEP 之外

曲线 $\widetilde{C}$ 是 C 的正交切线轨迹（orthoptic）：即所有可以向 C 作两条互相垂直切线的点的轨迹（locus）；对抛物线而言，它就是准线（directrix）。以一族切线来描述曲线，会引出包络线（envelope）以及射影几何（projective geometry）中的对偶（duality）概念。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《数学进阶题解》）收录了更多这类题目。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。