详细解答

STEP I 2019，第 11 题

概率与统计 · 几何分布

STEP I 2019，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2019 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP I 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

本题在 *Beyond STEP* 第 12.9 节用不公平的硬币作公平的决定中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch12/von-neumann.html

关键思路

两人程序的每一轮都是一次独立（independent）试验，要么作出决定，要么不作出决定，因此作出决定的轮次服从几何分布（geometric distribution）。题目中“无论 p 取何值”这个界限，归结为在 $p+q=1$ 的条件下 pq 最大可以是多少，而算术–几何平均不等式（AM–GM inequality）正好回答了这个问题。在第 (ii) 部分，第二轮不再是重新开始，所以我们按第一轮的结果分情况讨论，再用同一个关于 pq 的界限完成证明。

解答

第 (i) 部分

在任何一轮中，两枚硬币是独立的。当两枚都是正面（概率 p^2）或两枚都是反面（概率 q^2）时便作出决定，所以

$$\mathrm{P}(\text{在某一轮作出决定}) = p^2 + q^2, \qquad \mathrm{P}(\text{未作出决定}) = pq + qp = 2pq.$$

验证一下：$p^2 + q^2 + 2pq = (p+q)^2 = 1$。

由于每一轮都重新掷硬币，各轮之间是独立的。在第 n 轮作出决定，即是先有 $n-1$ 轮未作出决定，接着有一轮作出决定，所以

$$\mathrm{P}(\text{作出决定的轮次为}n) = (2qp)^{n-1}(q^2 + p^2),$$

这就是所求的结果。

至于第二个结果，用补事件（complement）最为简便。在第 n 轮或之前仍未作出决定，即是连续 n 轮都未作出决定，其概率为 $(2pq)^n$。因此

$$\mathrm{P}(\text{作出决定的轮次不迟于}n) = 1 - (2pq)^n.$$

（利用 $p^2+q^2 = 1-2pq$，把几何级数（geometric series）$\sum_{r=1}^{n}(p^2+q^2)(2pq)^{r-1}$ 求和，也会得到相同结果。）

现在我们需要一个对所有 p 都成立的 pq 上界（upper bound）。由于 $p, q \geq 0$，算术–几何平均不等式给出

$$\sqrt{pq} \leq \frac{p+q}{2} = \frac{1}{2}, \qquad \text{所以} \qquad pq \leq \frac{1}{4},$$

等号成立当且仅当 $p = q = \frac{1}{2}$。（等价地，$pq = p(1-p) = \frac{1}{4} - (p-\frac{1}{2})^2$。）因此 $0 \leq 2pq \leq \frac{1}{2}$，所以 $(2pq)^n \leq \frac{1}{2^n}$，从而

$$\mathrm{P}(\text{作出决定的轮次不迟于}n) = 1 - (2pq)^n \geq 1 - \frac{1}{2^n}$$

对 p 的每一个值都成立，正如所求。公平硬币是最差的情况。

第 (ii) 部分

设 D_1 为在第 1 轮作出决定的事件，D_2 为在第 2 轮作出决定的事件。由于这两个事件互斥（mutually exclusive），我们需要求的是 $\mathrm{P}(D_1) + \mathrm{P}(D_2)$。

第 1 轮。三枚全是正面或全是反面：$\mathrm{P}(D_1) = p^3 + q^3$。

第 2 轮。若第 1 轮未作出决定，则硬币显示的是两正一反，或两反一正。

- **两正一反**（概率 $3p^2q$，因为三人中任何一人都可以是掷出反面的那位）。掷出正面的两人再掷一次，第三人则把反面的硬币翻转成正面。此时不可能全是反面，而全是正面当且仅当两次新的投掷都是正面，概率为 p^2。这种情况贡献 $3p^2q \cdot p^2 = 3p^4q$。
- **两反一正**（概率 $3pq^2$）。同理，第三枚硬币此时显示反面，我们需要两次新的投掷都是反面，概率为 q^2。这种情况贡献 $3pq^2 \cdot q^2 = 3pq^4$。

第 2 轮的投掷与第 1 轮独立，所以可以把概率相乘。于是

$$\mathrm{P}(D_2) = 3p^4q + 3pq^4 = 3pq\,(p^3+q^3).$$

? **想一想** 有没有简洁的方法整理 $p^3+q^3+3pq(p^3+q^3)$?

先抽出公因式 p^3+q^3，再利用立方和公式及 $p+q=1$：

$$p^3+q^3 = (p+q)(p^2-pq+q^2) = (p+q)^2 - 3pq = 1-3pq.$$

因此

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\text{作出决定的轮次不迟于 } 2) &= (p^3+q^3)(1+3pq)\\ &= (1-3pq)(1+3pq)\\ &= 1-9p^2q^2.\end{aligned}$$

由第 (i) 部分，$0 \le pq \le \frac{1}{4}$，所以 $p^2q^2 \le \frac{1}{16}$，从而

$$\mathrm{P}(\text{作出决定的轮次不迟于 } 2) \ge 1-\frac{9}{16} = \frac{7}{16}$$

无论 p 取何值都成立，且当 $p=\frac{1}{2}$ 时等号成立。证明完毕。

验算

- 当 $p=1$（两面都是正面的硬币）时，立即作出决定。在第 (i) 部分，$1-(2pq)^n = 1$；在第 (ii) 部分，$1-9p^2q^2=1$，与预期相符。
- 在第 (ii) 部分取 $p=\frac{1}{2}$：第 1 轮作出决定的概率为 $\frac{1}{4}$。否则（概率 $\frac{3}{4}$）第 2 轮作出决定的概率为 $\frac{1}{4}$，得 $\frac{1}{4}+\frac{3}{16}=\frac{7}{16}$，所以这个界限是可以达到的。
- 取 $p=0.3$，公式给出 $1-9(0.21)^2 = 0.6031$。用电脑模拟三人程序 200 000 次，得到 0.602。

常见错误

- 在第 (ii) 部分第 1 轮中，忘记乘上表示谁是与众不同那一位的因子 3。
- 把第 (ii) 部分的第 2 轮当作全新的三枚硬币一轮来处理。被翻转的硬币已经固定，所以“全是正面”和“全是反面”只有其中一个可能发生。
- 只在 $p=\frac{1}{2}$ 时证明这个界限。你需要对每一个 p 都有 $pq \le \frac{1}{4}$，而算术–几何平均不等式这类不等式正好给你这个结果。

STEP 之外

第 (i) 部分是一个经典技巧，通常归功于冯·诺伊曼（von Neumann），用来从一枚有偏差的硬币得出公平的决定。在两人程序中，只有当 $p=\frac{1}{2}$ 时，“酒店”和“茶室”的可能性才相等；但如果由一人掷两次，并以 HT 和 TH 作为结果，那么对每一个 p 结果都是公平的。作出决定前所需的轮数是一个几何随机变量（geometric random variable），而关于这类程序多快停止的问题，引出了停时（stopping times）和马可夫链（Markov chains）

的研究。Grimmett 和 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率导论》）对两者都有介绍。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。