详细解答

STEP I 2019，第 10 题

力学 • 抛体运动

STEP I 2019，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2019 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP I 试卷：

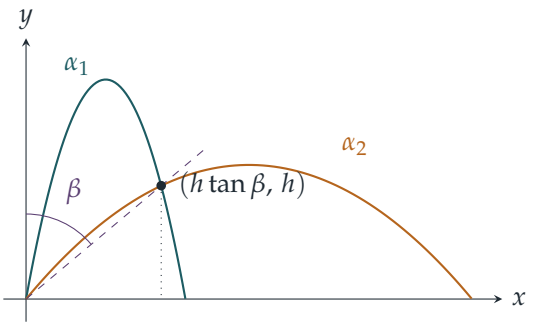
www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

关键思路

先写出以 x 表示 y 的轨迹方程（trajectory equation），代入那个定点，然后留意 $1/\sin^2\alpha = 1+\cot^2\alpha$ 可把方程化为关于 $c=\cot\alpha$ 的二次方程（quadratic）。之后，(i) 的一切都只是二次方程的代数：根之和与根之积（sum and product of roots）配合 cot 的和角公式（addition formula）就能得出 $\alpha_1+\alpha_2$，而“两个相异的根”则是一个判别式（discriminant）条件。第 (ii) 部分只需用一行能量论证（或 $v^2=u^2+2as$）便可完成。

解答

把粒子视为在重力作用下自由运动的质点（point mass），不计空气阻力。角 α 从向上的铅垂线量起，因此初速度的水平分量为 $u\sin\alpha$，铅垂分量为 $u\cos\alpha$。



上图显示经过该点的两条可能轨迹（以 $\beta=50°$、$k=8$ 绘制）。该点位于经过 O、与铅垂线成 β 角的直线上。

第 (i) 部分

在时间 t，

$$x = ut\sin\alpha, \qquad y = ut\cos\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

由于 $0 < \beta < 90°$，该点的 $x > 0$，所以 $\sin\alpha \neq 0$，于是可以消去 $t = x/(u\sin\alpha)$：

$$y = x\cot\alpha - \frac{gx^2}{2u^2\sin^2\alpha} = cx - \frac{gx^2}{2u^2}(1+c^2),$$

这里用了 $\csc^2\alpha = 1 + \cot^2\alpha$。现在代入 $x = h\tan\beta$、$y = h$，并除以 $h > 0$：

$$1 = c\tan\beta - \frac{gh}{2u^2}\tan^2\beta\,(1+c^2) = c\tan\beta - \frac{\tan^2\beta}{k}(1+c^2).$$

两边乘以 $k\cot^2\beta$，得 $k\cot^2\beta = ck\cot\beta - 1 - c^2$，即

$$c^2 - ck\cot\beta + 1 + k\cot^2\beta = 0, \qquad (*)$$

此即所求。

(a) 两个值 $c_1 = \cot\alpha_1$ 和 $c_2 = \cot\alpha_2$ 就是关于 c 的二次方程 $(*)$ 的两个根。（它们相异，因为 cot 在 $(0,\pi)$ 上是一一对应（one-to-one）的。）因此，由根之和与根之积，

$$\cot\alpha_1 + \cot\alpha_2 = k\cot\beta, \qquad \cot\alpha_1\cot\alpha_2 = 1 + k\cot^2\beta.$$

第一式就是第一个结果。至于第二个结果，利用 cot 的和角公式：

$$\cot(\alpha_1+\alpha_2) = \frac{\cot\alpha_1\cot\alpha_2 - 1}{\cot\alpha_1 + \cot\alpha_2} = \frac{k\cot^2\beta}{k\cot\beta} = \cot\beta.$$

? **想一想** $\cot(\alpha_1+\alpha_2) = \cot\beta$ 真的能推出 $\alpha_1 + \alpha_2 = \beta$ 吗?

单靠这一点并不能：cot 的周期（period）是 180°，所以我们还需要确定 $\alpha_1+\alpha_2$ 的范围。这里根之和 $k\cot\beta$ 与根之积 $1 + k\cot^2\beta$ 都是正数（因为 $k > 0$ 且 $\cot\beta > 0$），所以两个根 c_1, c_2 都是正数。因此两个角都是锐角，$0 < \alpha_1 + \alpha_2 < 180°$，而 cot 在这个区间上是一一对应的。由于 β 也在这个区间内，所以 $\alpha_1 + \alpha_2 = \beta$。

(b) 要有两个相异的实数值 c，$(*)$ 的判别式必须为正：

$$k^2\cot^2\beta - 4(1 + k\cot^2\beta) > 0.$$

两边乘以 $\tan^2\beta > 0$，

$$k^2 - 4k - 4\tan^2\beta > 0.$$

左边关于 k 的二次式的根为 $k = 2 \pm \sqrt{4 + 4\tan^2\beta} = 2 \pm 2\sec\beta$（利用 $1 + \tan^2\beta = \sec^2\beta$ 及 $\sec\beta > 0$），所以不等式成立当且仅当 $k < 2 - 2\sec\beta$ 或 $k > 2 + 2\sec\beta$。但 $\sec\beta > 1$，所以 $2 - 2\sec\beta < 0 < k$，第一种情况不可能出现。因此

$$k > 2(1 + \sec\beta).$$

第 (ii) 部分

粒子必须升到高度 $h > 0$，所以其初始铅垂速度 $u\cos\alpha$ 为正。在铅垂方向上，运动的加速度恒为 $-g$，而在最高点时铅垂速度为零，所以由 $v^2 = u^2 + 2as$，最大高度为

$$H = \frac{u^2\cos^2\alpha}{2g}.$$

粒子经过高度为 h 的一点，所以 $H \geq h$：

$$\frac{u^2\cos^2\alpha}{2g} \geq h \quad\Longrightarrow\quad \frac{2u^2}{gh}\cos^2\alpha \geq 4 \quad\Longrightarrow\quad k \geq 4\sec^2\alpha,$$

其中先乘以 $4/(gh) > 0$，再除以 $\cos^2\alpha > 0$。等号成立当且仅当点 $(h\tan\beta, h)$ 正是轨迹的最高点。

验算

- 取 $\beta = 50°$、$k = 8$。此时 $2(1+\sec 50°) \approx 5.11 < 8$，所以存在两个角；解 $(*)$ 得 $\alpha_1 \approx 10.29°$ 及 $\alpha_2 \approx 39.71°$，两者之和为 $50°$。以数值方法逐步推进运动，两条轨迹在 $x = h\tan\beta$ 处都达到高度 $1.0000\,h$。
- 对这两个角，$k\cos^2\alpha \approx 7.74$ 及 4.73，都不小于 4，符合 (ii) 的要求。
- 以电脑对数千组随机的 β、h、k 进行检验，证实 $(*)$ 有两个相异根当且仅当 $k > 2(1+\sec\beta)$，并且每次都有 $\alpha_1 + \alpha_2 = \beta$。
- 单位：$u^2/(gh)$ 是无量纲（dimensionless）的，正如 k 应有的那样。

常见错误

- 出于习惯，从水平线量度 α：本题中水平分量是 $u\sin\alpha$，而不是 $u\cos\alpha$。
- 未证明两个角都是锐角，便由 $\cot(\alpha_1+\alpha_2) = \cot\beta$ 得出 $\alpha_1 + \alpha_2 = \beta$。
- 在 (b) 中保留了负数的根 $k < 2 - 2\sec\beta$。

STEP 之外

结果 $\alpha_1 + \alpha_2 = \beta$ 说明两个发射方向关于铅垂线与目标连线之间的角平分线（bisector）对称，这是关于“安全抛物线”（parabola of safety）的一个经典事实：安全抛物线是所有速率为 u 的轨迹的包络线（envelope），对应于两根重合的临界情况 $k = 2(1+\sec\beta)$。曲线族的包络线是大学一年级一个连系微积分与几何的有趣课题。如想阅读更多同类风格的力学，可参考 Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。