详细解答

STEP I 2019，第 1 题

纯数学 · 三角函数的最优化

STEP I 2019，第 1 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2019 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP I 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

关键思路

一切都取决于直线与两轴的交点。求周界（perimeter）时，定点 $P=(1,k)$ 把斜边（hypotenuse）XY 分成两段，每段都是一个小直角三角形（right-angled triangle）的斜边，而且该小三角形有一条边的长度已知，所以根本不必展开任何平方根。求最小值时，面积是两项之和，而这两项的积是常数（正是算术－几何平均不等式（AM–GM inequality）的典型情况）；至于周界的导数（derivative），只要利用 $\cos^2\theta=(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)$，便会漂亮地化简。

解答

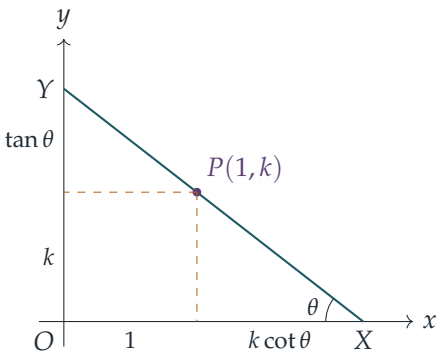
经过 $(1,k)$ 而斜率（gradient）为 $-\tan\theta$ 的直线是

$$y-k=-\tan\theta\,(x-1).$$

代入 $y=0$ 得 $x-1=k\cot\theta$；代入 $x=0$ 得 $y=k+\tan\theta$，所以

$$X=(1+k\cot\theta,\,0),\qquad Y=(0,\,k+\tan\theta).$$

由于 $k>0$ 且 $0<\theta<\frac{1}{2}\pi$，两个截距（intercept）都是正数，因此 OXY 确实是第一象限内的一个直角三角形，而 $P=(1,k)$ 位于其斜边上。



第 (i) 部分

三角形在 O 处是直角，所以

$$\begin{aligned} A &= \tfrac{1}{2}(1 + k\cot\theta)(k + \tan\theta) = \tfrac{1}{2}\big(k + \tan\theta + k^2\cot\theta + k\big) \\ &= k + \tfrac{1}{2}\big(\tan\theta + k^2\cot\theta\big), \end{aligned}$$

这里用了 $\cot\theta\tan\theta = 1$。

求最小值时，$\tan\theta$ 与 $k^2\cot\theta$ 均为正数，而且两者之积是常数 k^2。由算术－几何平均不等式，

$$\tan\theta + k^2\cot\theta \geq 2\sqrt{\tan\theta\cdot k^2\cot\theta} = 2k,$$

等号成立当且仅当 $\tan\theta = k^2\cot\theta$，即 $\tan\theta = k$（由于 $k > 0$，范围内必有某个 θ 达到此值）。因此 $A \geq k + k = 2k$，而

$$A_{\min} = 2k.$$

（用微分亦得同样结果：$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\theta} = \frac{1}{2}(\sec^2\theta - k^2\operatorname{cosec}^2\theta) = 0$ 当 $\tan^2\theta = k^2$。）取最小值时 $X = (2, 0)$、$Y = (0, 2k)$，所以 P 是 XY 的中点。

第 (ii) 部分

两条直角边分别是 $OX = 1 + k\cot\theta$ 和 $OY = k + \tan\theta$。至于斜边，按图在 P 处把它分开。

- 由 P 到 Y：水平距离是 1，而直线与水平方向成 θ 角，所以 $PY = 1/\cos\theta = \sec\theta$。
- 由 P 到 X：铅垂距离是 k，所以 $PX = k/\sin\theta = k\operatorname{cosec}\theta$。

把四段长度相加，

$$L = 1 + \tan\theta + \sec\theta + k\big(1 + \cot\theta + \operatorname{cosec}\theta\big),$$

正如所求。

想一想 导数中含有 $\sec^2\theta+\sec\theta\tan\theta$。在令它等于零之前，有没有办法把它大大化简?

有的。逐项微分，

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\theta}=\sec^2\theta+\sec\theta\tan\theta-k\big(\operatorname{cosec}^2\theta+\operatorname{cosec}\theta\cot\theta\big)=\frac{1+\sin\theta}{\cos^2\theta}-k\,\frac{1+\cos\theta}{\sin^2\theta}.$$

由于 $\cos^2\theta=(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)$、$\sin^2\theta=(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)$，而 $1+\sin\theta$ 和 $1+\cos\theta$ 都不为零，所以可以约去:

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\theta}=\frac{1}{1-\sin\theta}-\frac{k}{1-\cos\theta}.$$

它等于零当且仅当 $1-\cos\theta=k(1-\sin\theta)$。所以最小值出现在 $\theta=\alpha$，其中

$$\frac{1-\cos\alpha}{1-\sin\alpha}=k,$$

这正是要证明的。（事实上这是唯一的驻点（stationary point），而且是最小值：当 θ 在 $(0,\frac{1}{2}\pi)$ 上递增时，$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\theta}$ 的第一项递增，第二项递减，所以 $\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\theta}$ 是递增的，并且只会由负转正一次。）

想一想 怎样才能把最小值中的 k 消去?

把 L 的各项分组并通分:

$$1+\tan\alpha+\sec\alpha=\frac{1+\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha},\qquad 1+\cot\alpha+\operatorname{cosec}\alpha=\frac{1+\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

记 $s=\sin\alpha$、$c=\cos\alpha$，且 $k=\dfrac{1-c}{1-s}$，则第二部分变成

$$k\,\frac{1+s+c}{s}=\frac{(1+s+c)(1-c)}{s(1-s)}=\frac{1+s-sc-c^2}{s(1-s)}=\frac{s^2+s-sc}{s(1-s)}=\frac{1+s-c}{1-s},$$

这里用了 $1-c^2=s^2$。因此

$$\begin{aligned}L_{\min}=\frac{1+s+c}{c}+\frac{1+s-c}{1-s}&=\frac{(1+s+c)(1-s)+c(1+s-c)}{c(1-s)}\\&=\frac{1-s^2+c-sc+c+sc-c^2}{c(1-s)}\\&=\frac{2c}{c(1-s)},\end{aligned}$$

因为 $1-s^2-c^2=0$。所以

$$L_{\min}=\frac{2}{1-\sin\alpha}.$$

验算

取 $k=1$。此时 $\tan\theta=1$ 给出 $X=(2,0)$、$Y=(0,2)$ 及 $A=2=2k$，与预测相符。周界的条件 $(1-\cos\alpha)/(1-\sin\alpha)=1$ 给出 $\alpha=\frac{1}{4}\pi$，而 $2/(1-\frac{1}{\sqrt{2}})=4+2\sqrt{2}\approx 6.828$，恰好等于顶点为 $(0,0)$、$(2,0)$、$(0,2)$ 的三角形的周界 $2+2+2\sqrt{2}$。对于其他一系列 k 值，用电脑对 θ 进行搜索，亦证实了两个最小值以及周界最小值出现的位置。

常见错误

- 求斜边时去展开 $\sqrt{(1+k\cot\theta)^2+(k+\tan\theta)^2}$，而不是在 P 处把它分开。
- 直接令未化简的导数等于零，结果迷失在算式中；应先约去 $1+\sin\theta$ 和 $1+\cos\theta$。
- 最终答案中仍保留 k：题目要求只用 α 表示最小值。

STEP 之外

这个简洁的答案背后有一个几何解释。经过 P 而使周界最小的直线，正是在 P 处与一个同时和两轴相切的圆（OXY 的一个旁切圆（excircle））相切的那条直线；此时周界等于由 O 到该圆的切线长的两倍。这个圆经过 P，半径为 r，且 $r=1/(1-\sin\alpha)$。带有“直线经过 P”这类约束条件的最优化（optimisation）问题，正是大学一年级微积分课程中拉格朗日乘数法（Lagrange multipliers）的起点。想看更多同类问题，可参阅 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等数学问题》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。