详细解答

# STEP III 2018，第 9 题

力学 · 碰撞与递推关系

**STEP III 2018，第 9 题**

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/18-s3-q9

## 关键思路

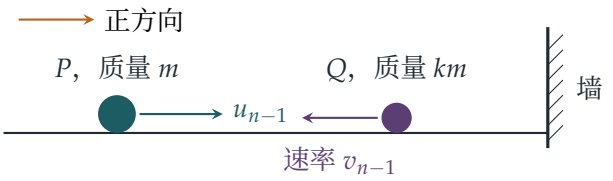
$P$ 与 $Q$ 每次碰撞（collision）都给出两条线性方程：一条来自动量守恒（conservation of momentum），一条来自牛顿碰撞定律（Newton's law of restitution），把碰撞前后的速度联系起来。墙壁只是把 $Q$ 的速度反向，因此某次碰撞前的状态完全由上一次碰撞后的状态决定。这样便得到一对关于 $u_n$ 和 $v_n$ 的一阶递推关系（first-order recurrence），消去 $v$ 后就剩下一条关于 $u_n$ 的二阶递推关系（second-order recurrence）。第 (ii) 部分就是常规工作：把线性递推关系的解配合其首两项。

## 解答

我们把 $P$ 和 $Q$ 视为在光滑（smooth）地面上沿同一直线运动的质点（particle），因此两次碰撞之间没有水平力作用，每个质点都保持等速。全程取朝向墙壁的方向为正方向。

**两次碰撞之间发生甚么。** 第 $n$ 次碰撞后，$Q$ 的速度为 $v_n$（朝向墙壁，因为它接着会撞墙）。与墙的碰撞是完全弹性（perfectly elastic）的，所以 $Q$ 以速度 $-v_n$ 反弹回来，而 $P$ 的速度仍是 $u_n$。因此在第 $n+1$ 次碰撞前一刻，速度分别为 $u_n$（$P$ 的）和 $-v_n$（$Q$ 的）。

只要正确理解 $v_0$，这对第一次碰撞同样成立：碰撞前，$Q$ 以速率 $v_0$ 离开墙壁运动，所以其速度为 $-v_0$，正好是上述模式在 $n=0$ 时的情况。




**第 (i) 部分**

对第 $n$ 次碰撞（$n \geq 1$），由动量守恒（两边除以 $m$）得

$$u_{n-1} - kv_{n-1} = u_n + kv_n. \tag{1}$$

接近速率（speed of approach）为 $u_{n-1} - (-v_{n-1}) = u_{n-1} + v_{n-1}$。碰撞后，较接近墙壁的 $Q$ 朝墙运动得比 $P$ 快，所以分离速率（speed of separation）为 $v_n - u_n$。由牛顿碰撞定律得

$$v_n - u_n = e\,(u_{n-1} + v_{n-1}). \tag{2}$$

把 (2) 中的 $v_n$ 代入 (1)：

$$u_{n-1} - kv_{n-1} = (1+k)u_n + ke\,(u_{n-1} + v_{n-1}),$$

所以

$$k(1+e)\,v_{n-1} = (1-ke)\,u_{n-1} - (1+k)\,u_n \qquad (n \geq 1). \tag{3}$$

这条式把每个 $v$ 以两个相邻的 $u$ 表示，正是消去 $v$ 所需要的。

? **想一想** 方程 (3) 消去了 $v_{n-1}$，但 (2) 还含有 $v_n$。该怎样处理?

方程 (3) 对所有 $n \geq 1$ 成立，所以我们也可以用 $n+1$ 代替 $n$：

$$k(1+e)\,v_n = (1-ke)\,u_n - (1+k)\,u_{n+1}.$$

现在把 (2) 乘以 $k(1+e)$，并利用这两条式替换 $k(1+e)v_n$ 和 $k(1+e)v_{n-1}$：

$$(1-ke)u_n - (1+k)u_{n+1} - k(1+e)u_n = ke(1+e)\,u_{n-1} + e[(1-ke)u_{n-1} - (1+k)u_n].$$

整理各项。右边 $u_{n-1}$ 的系数为 $ke + ke^2 + e - ke^2 = e(1+k)$。把 $u_n$ 的项移到左边，其系数为

$$1 - ke - k - ke + e + ke = 1 - k + e - ke = (1+e)(1-k).$$

因此

$$(1+k)u_{n+1} - (1-k)(1+e)u_n + e(1+k)u_{n-1} = 0 \qquad (n \geq 1),$$

再以 $n-1$ 代替 $n$，便得到对 $n \geq 2$ 成立的 $(*)$，即所求。

**第 (ii) 部分**

当 $e=\frac{1}{2}$ 及 $k=\frac{1}{34}$ 时，把 $(*)$ 乘以 68 得

$$70u_n-99u_{n-1}+35u_{n-2}=0,$$

其辅助方程（auxiliary equation）$70t^2-99t+35=(10t-7)(7t-5)=0$ 的根为 $\frac{7}{10}$ 和 $\frac{5}{7}$，与题目给出的形式吻合。

要确定 $A$ 和 $B$ 需要两个条件，即首两项。我们已知 $u_0$。至于 $u_1$，在 $(3)$ 中取 $n=1$:

$$(1+k)u_1=(1-ke)u_0-k(1+e)v_0,$$

$$\text{所以}\quad \tfrac{35}{34}u_1=\tfrac{67}{68}u_0-\tfrac{3}{68}v_0,\quad \text{得}\quad u_1=\frac{67u_0-3v_0}{70}.$$

把 $n=0$ 和 $n=1$ 代入给定的形式，

$$A+B=u_0,\qquad \tfrac{7}{10}A+\tfrac{5}{7}B=\frac{67u_0-3v_0}{70}.$$

把第二条方程乘以 70 得 $49A+50B=67u_0-3v_0$。减去第一条方程的 49 倍，

$$B=18u_0-3v_0,\qquad A=u_0-B=3v_0-17u_0.$$

**$n$ 很大时 $u_n$ 的正负号**。由于 $\frac{5}{7}>\frac{7}{10}$（因为 $50>49$），$B$ 项占主导地位。准确地说，

$$u_n=\left(\tfrac{5}{7}\right)^n\left[B+A\left(\tfrac{49}{50}\right)^n\right],$$

而 $\left(\frac{49}{50}\right)^n\to 0$，所以括号趋于 $B$。若 $0<6u_0<v_0$，则 $B=3(6u_0-v_0)<0$，所以对所有足够大的 $n$，括号都是负数。由于 $\left(\frac{5}{7}\right)^n>0$，当 $n$ 很大时 $u_n$ 为负，即所求。（具体而言，一旦 $|A|(\frac{49}{50})^n<|B|$，括号便是负数。）

从物理角度看，$P$ 最终会被撞回、离开墙壁：$Q$ 相对于 $P$ 有足够的初始速率，能不断把它推回去，尽管 $Q$ 轻得多。

## 验算

- 取 $e=1$、$k=1$（质量相等、完全弹性）：$(*)$ 变成 $2u_n+2u_{n-2}=0$，所以 $u_n=-u_{n-2}$。事实上，质量相等的物体作弹性碰撞会互换速度，所以 $u_1=-v_0$ 及 $u_2=-v_1$；然后 $Q$ 带着 $P$ 原来的速度 $u_0$ 撞墙再折返，得 $u_2=-u_0$。
- 在 $n=0$ 时公式给出 $A+B=u_0$，在 $n=1$ 时给出

  $$\tfrac{7}{10}(3v_0-17u_0)+\tfrac{5}{7}(18u_0-3v_0)=\tfrac{1}{70}(67u_0-3v_0),$$

  正如预期。
- 取 $u_0=1$、$v_0=7$，得 $A=4$、$B=-3$。逐次计算每次碰撞，结果与公式完全吻合，而 $u_n$ 首次变为负数是在 $n=15$，此时 $u_{15}\approx -0.00029$。

## 常见错误

- 忘记 $Q$ 在碰撞前一刻的速度是 $-v_{n-1}$ 而不是 $v_{n-1}$：墙壁把它反向了。
- 在碰撞定律方程中把分离速率的正负号弄错；碰撞后 $Q$ 在正方向上位于 $P$ 前面，所以分离速率是 $v_n - u_n$。
- 未从碰撞方程求出 $u_1$ 便使用 $u_1 = \frac{7}{10}A + \frac{5}{7}B$；单靠 $(*)$ 是无法得出它的。

## STEP 之外

方程 (1) 和 (2) 合起来是一个线性映射（linear map），把状态 $(u_{n-1}, v_{n-1})$ 映到 $(u_n, v_n)$，所以整个运动就是反复乘以一个 $2 \times 2$ 矩阵（matrix）。根 $\frac{7}{10}$ 和 $\frac{5}{7}$ 是它的特征值（eigenvalue），长期行为由最大的特征值支配：这正是线性动力系统（linear dynamical systems）与差分方程（difference equations）理论的起点。想进一步了解碰撞力学，可参阅 Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学导论）；至于矩阵的观点，可参阅 Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（线性代数导论）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。