详细解答

STEP III 2018，第 8 题

纯数学 • 小数部分的积分

STEP III 2018，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/18-s3-q8

关键思路

被积函数（integrand）中最麻烦的是 x^{-1}，所以作代换（substitution）$y = 1/x$：这把 $[0,1]$ 变成 $[1,\infty)$，而后者很自然地可以分拆成一个个单位区间。如果 f 的周期（period）是 1，每个单位区间都可以平移回 $[0,1]$，剩下的有理因子就组成一个伸缩和（telescoping sum）。这样一来，第 (ii) 部分只需看出 $\{x\}$ 和 $\{2x\}$ 的周期都是 1 便可。

解答

第 (i) 部分

设 $x = 1/y$，于是 $\mathrm{d}x = -\frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y$；当 x 由 0 变到 1 时，y 由 ∞ 递减至 1。此外 $1 + x = \frac{y+1}{y}$，所以

$$I = \int_{\infty}^{1} \frac{\mathrm{f}(y)}{(y+1)/y}\left(-\frac{1}{y^2}\right)\mathrm{d}y = \int_{1}^{\infty} \frac{\mathrm{f}(y)}{y(1+y)}\,\mathrm{d}y.$$

把 $[1,\infty)$ 分拆成区间 $[n, n+1]$（其中 $n = 1, 2, 3, \ldots$），便得

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n}^{n+1} \frac{\mathrm{f}(y)}{y(1+y)}\,\mathrm{d}y,$$

正是所求。

现在假设对所有 x 都有 $\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(x+1)$，因此对每个整数 n 都有 $\mathrm{f}(x+n) = \mathrm{f}(x)$。在第 n 个积分中设 $y = x + n$，于是 x 的范围是 $[0,1]$：

$$\int_{n}^{n+1} \frac{\mathrm{f}(y)}{y(1+y)}\,\mathrm{d}y = \int_{0}^{1} \frac{\mathrm{f}(x)}{(x+n)(x+n+1)}\,\mathrm{d}x.$$

想一想 怎样把无限多个这样的积分加起来?

每个积分都有相同的 $\mathrm{f}(x)$ 和积分范围，所以（按题目指示，不理会收敛（convergence）问题）我们可以交换求和与积分的次序，先把有理因子加起来。利用部分分式（partial fractions），

$$\frac{1}{(x+n)(x+n+1)} = \frac{1}{x+n} - \frac{1}{x+n+1},$$

所以这个和会逐项相消：对固定的 $x \in [0,1]$，

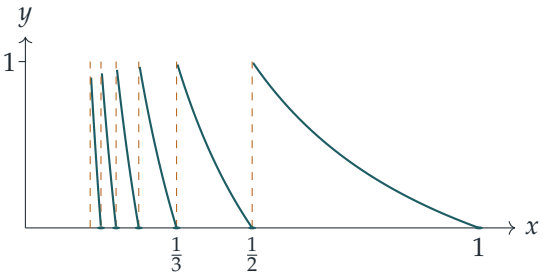
$$\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{x+n+1}\right) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+N+1} \longrightarrow \frac{1}{1+x} \quad \text{当} N \to \infty.$$

因此

$$I = \int_0^1 \mathrm{f}(x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{f}(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x,$$

这就是我们想要的结果。

第 (ii) 部分



上面 $\{x^{-1}\}$ 的图像说明了为何直接计算是行不通的：在每个区间 $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ 上，它等于 $\frac{1}{x} - n$，而这样的片段有无限多段，越来越密地挤向 0。第 (i) 部分让我们完全避开了这些麻烦。

第一个积分。取 $\mathrm{f}(x) = \{x\}$。把 x 加 1，$\lfloor x \rfloor$ 也会加 1，所以 $\{x+1\} = \{x\}$，即 f 的周期是 1。在 $[0,1)$ 上有 $\{x\} = x$（单一点 $x = 1$ 的函数值不影响积分）。所以由第 (i) 部分，

$$\int_0^1 \frac{\{x^{-1}\}}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x = 1 - \ln 2.$$

第二个积分。取 $\mathrm{f}(x) = \{2x\}$，那么正如所需，$\mathrm{f}(x^{-1}) = \{2x^{-1}\}$。

想一想 函数 $\{2x\}$ 的周期是 $\frac{1}{2}$。我们仍然可以用第 (i) 部分吗?

可以：任何周期为 $\frac{1}{2}$ 的函数，周期也是 1，因为 $\{2(x+1)\} = \{2x+2\} = \{2x\}$。所以第 (i) 部分适用。在 $[0, \frac{1}{2})$ 上，$2x \in [0,1)$ 而 $\{2x\} = 2x$；在 $[\frac{1}{2}, 1)$ 上，$2x \in [1,2)$ 而 $\{2x\} = 2x-1$。因此

$$\int_0^1 \frac{\{2x^{-1}\}}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{1/2} \frac{2x}{1+x}\,\mathrm{d}x + \int_{1/2}^1 \frac{2x-1}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

把 $\frac{2x}{1+x} = 2 - \frac{2}{1+x}$ 及 $\frac{2x-1}{1+x} = 2 - \frac{3}{1+x}$ 代入，

$$\int_0^{1/2} \frac{2x}{1+x}\,\mathrm{d}x = 1 - 2\ln\tfrac{3}{2},$$
$$\int_{1/2}^1 \frac{2x-1}{1+x}\,\mathrm{d}x = 1 - 3\ln\frac{2}{3/2} = 1 - 3\ln\tfrac{4}{3}.$$

两者相加，再合并对数（logarithm）项，

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\{2x^{-1}\}}{1+x}\,\mathrm{d}x &= 2 - 2\ln 3 + 2\ln 2 - 6\ln 2 + 3\ln 3 \\ &= 2 + \ln 3 - 4\ln 2 = 2 + \ln\tfrac{3}{16}.\end{aligned}$$

验算

- 由于 $0 \le \{\cdot\} < 1$，两个答案都应该介乎 0 与 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \ln 2 \approx 0.693$ 之间。我们得到 $1 - \ln 2 \approx 0.3069$ 和 $2 + \ln\frac{3}{16} \approx 0.3260$，都很合理：小数部分（fractional part）的平均值约为 $\frac{1}{2}$，所以答案应大约是 0.693 的一半。
- 用电脑把在片段 $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ 上（第二个积分则用这些片段的两半）的积分逐一加起来，取数以千计的片段，得到 0.306853 和 0.326024，与两个答案吻合。

常见错误

- 代换 $y = 1/x$ 后把积分上下限弄反，又漏掉负号；其实 $\mathrm{d}x$ 带来的负号与上下限对调正好互相抵消。
- 以为在整个 $[0,1]$ 上都有 $\{2x\} = 2x$：其实它在 $x = \frac{1}{2}$ 处下跌 1。
- 以为第 (i) 部分要求周期恰好是 1；其实任何周期为 $\frac{1}{k}$（k 为正整数）的函数，周期也是 1。

STEP 之外

我们在这里不加说明就交换了无穷级数与积分的次序，而这正是在大学里需要严格论证的那类步骤；单调收敛定理（monotone convergence theorem）和控制收敛定理（dom-

inated convergence theorem）等定理说明了何时可以安全地这样做（在这里，当 $f \geq 0$ 时每一项都非负，属于容易的情况）。同样的代换思路可以得出一些关于小数部分的著名积分，例如 $\int_0^1 \{1/x\}\,\mathrm{d}x = 1 - \gamma$，其中 γ 是欧拉（Euler）常数。若想严谨地学习极限、级数与积分，可参阅 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。