详细解答

STEP III 2018，第 7 题

纯数学 · 棣美弗定理与级数

> **STEP III 2018，第 7 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/18-s3-q7

本题在 *Beyond STEP* 第 2.4 节 $\pi^2/6$ 中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch02/basel.html

关键思路

式子 $\cot\theta + \mathrm{i}$ 其实就是乔装了的 $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)/\sin\theta$，因此棣美弗定理（De Moivre's theorem）可把它的幂化为倍角。改用二项式定理（binomial theorem）展开同样的幂，则得到一个以 $\cot^2\theta$ 为变量的多项式（polynomial），而它的根（roots）可以从 $\sin(2n+1)\theta$ 等于零的位置直接读出。接着，韦达定理（Vieta's formula）不费吹灰之力便给出各根之和；再把 $1/\theta^2$ 夹在 $\cot^2\theta$ 与 $1+\cot^2\theta$ 之间，便能把巴塞尔（Basel）级数（series）困在两个趋向同一极限的界之间。

解答

第 (i) 部分

由于 $\sin\theta \neq 0$，

$$\cot\theta \pm \mathrm{i} = \frac{\cos\theta \pm \mathrm{i}\sin\theta}{\sin\theta}.$$

根据棣美弗定理，$(\cos\theta \pm \mathrm{i}\sin\theta)^{2n+1} = \cos(2n+1)\theta \pm \mathrm{i}\sin(2n+1)\theta$，所以

$$\frac{(\cot\theta+\mathrm{i})^{2n+1} - (\cot\theta-\mathrm{i})^{2n+1}}{2\mathrm{i}} = \frac{2\mathrm{i}\sin(2n+1)\theta}{2\mathrm{i}\,\sin^{2n+1}\theta} = \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin^{2n+1}\theta},$$

这正是所求的恒等式（identity）。

现在改用二项式定理展开左方。记 $c = \cot\theta$ 及 $N = 2n+1$,

$$(c+\mathrm{i})^N - (c-\mathrm{i})^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} c^{N-k}\,\mathrm{i}^k\big(1-(-1)^k\big).$$

当 k 为偶数时, 括号内的值是 0; 当 k 为奇数时, 则是 2。令 $k = 2j+1$, 其中 $j = 0, 1, \ldots, n$; 那么 $\mathrm{i}^k = \mathrm{i}(-1)^j$，而 $c^{N-k} = c^{2(n-j)}$。除以 2i，并记 $x = \cot^2\theta$，得

$$\frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin^{2n+1}\theta} = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{2n+1}{2j+1}x^{n-j} = \binom{2n+1}{1}x^n - \binom{2n+1}{3}x^{n-1} + \cdots + (-1)^n.$$

把这个多项式记作 $P(x)$。它的次数是 n，首项系数（leading coefficient）为 $2n+1 \neq 0$。取 $\theta_m = \dfrac{m\pi}{2n+1}$, 其中 $m = 1, \ldots, n$。那么 $0 < \theta_m < \frac{1}{2}\pi$, 故 $\sin\theta_m \neq 0$, 且 $\sin(2n+1)\theta_m = \sin m\pi = 0$。因此

$$P\big(\cot^2\theta_m\big) = 0, \qquad m = 1, 2, \ldots, n.$$

想一想 我们怎样知道这些就是全部的解，而不只是其中一部分?

在 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 上，$\cot\theta$ 为正而且严格递减（strictly decreasing），所以 $\cot^2\theta$ 亦严格递减。角 $\theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_n$ 全都位于这个区间内，故这 n 个数 $\cot^2\theta_m$ 互不相同。一个 n 次多项式最多只有 n 个根，所以它们恰好就是 $P(x) = 0$ 的所有解。

第 (ii) 部分

$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots$ 的各根之和是 $-a_{n-1}/a_n$。这里 $a_n = \binom{2n+1}{1}$, $a_{n-1} = -\binom{2n+1}{3}$, 所以

$$\sum_{m=1}^{n}\cot^2\left(\frac{m\pi}{2n+1}\right) = \frac{\binom{2n+1}{3}}{\binom{2n+1}{1}} = \frac{(2n+1)(2n)(2n-1)}{6\,(2n+1)} = \frac{n(2n-1)}{3},$$

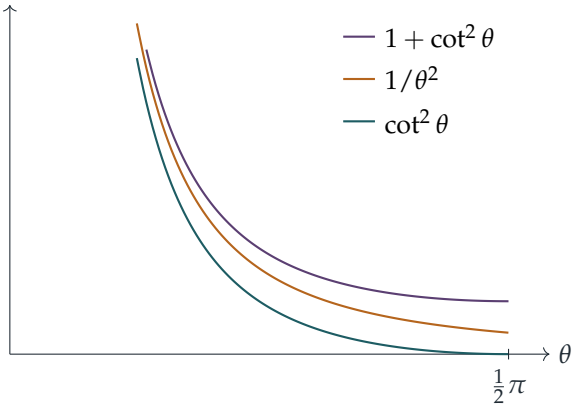
正如所求。

第 (iii) 部分

题目给出，当 $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$ 时，$0 < \sin\theta < \theta < \tan\theta$。三者皆为正数，所以平方后大小次序不变，而取倒数（reciprocal）则令次序倒转:

$$\frac{1}{\tan^2\theta} < \frac{1}{\theta^2} < \frac{1}{\sin^2\theta}, \qquad \text{即} \qquad \cot^2\theta < \frac{1}{\theta^2} < 1 + \cot^2\theta,$$

这里用了 $\operatorname{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$。



令 $\theta=\theta_m=\dfrac{m\pi}{2n+1}$，使得 $\dfrac{1}{\theta_m^2}=\dfrac{(2n+1)^2}{\pi^2}\cdot\dfrac{1}{m^2}$，然后把 $m=1,\dots,n$ 的不等式相加。记 $S_n=\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^2}$，并利用第 (ii) 部分，得

$$\frac{n(2n-1)}{3}<\frac{(2n+1)^2}{\pi^2}S_n<n+\frac{n(2n-1)}{3}=\frac{2n(n+1)}{3}.$$

全式乘以 $\pi^2/(2n+1)^2>0$，得

$$\frac{\pi^2}{3}\cdot\frac{n(2n-1)}{(2n+1)^2}<S_n<\frac{\pi^2}{3}\cdot\frac{2n(n+1)}{(2n+1)^2}.$$

把分子分母同除以 n^2，可见当 $n\to\infty$ 时两个分数都趋向 $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$，所以两个界都趋向 $\frac{\pi^2}{6}$。根据夹逼定理（squeeze / sandwich theorem），$S_n\to\frac{\pi^2}{6}$，即

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

验算

- 当 $n=1$ 时，多项式是 $3x-1$，其根为 $\frac{1}{3}=\cot^2\frac{\pi}{3}$，而第 (ii) 部分的公式亦给出 $1\times1/3=\frac{1}{3}$。当 $n=2$ 时，$\cot^2\frac{\pi}{5}+\cot^2\frac{2\pi}{5}$ 应等于 2；数值上 $1.894+0.106=2.000$。
- 取 $n=50$，第 (iii) 部分的界为 $1.5964<S_{50}=1.6251<1.6448$，而 $\pi^2/6\approx1.6449$。两个界互相逼近，这是理所当然的，因为两者之差为 $\pi^2n/(2n+1)^2\approx\pi^2/(4n)$。

常见错误

- 证明了每个 $\cot^2\theta_m$ 都是根，却忘记论证它们互不相同——正是这一点才令它们成为全部的解。

- 弄错韦达定理中的正负号：x^{n-1} 的系数是 $-\binom{2n+1}{3}$，所以各根之和是 $+\binom{2n+1}{3}/\binom{2n+1}{1}$。
- 把不等式倒转时没有指出所有量皆为正数，而这正是容许平方及取倒数的前提。

STEP 之外

欧拉（Euler）在 1734 年首先求得 $\sum 1/m^2 = \pi^2/6$，方法是把 $\sin x/x$ 当作一个“无穷次多项式”来比较系数——与这里所用的韦达思路相同，只是欠缺了夹逼法所提供的严谨性。到了大学，你会通过傅里叶级数（Fourier series）（帕塞瓦尔恒等式（Parseval's identity））再次遇见这个和，亦会以 $\zeta(2)$ 的身份遇见它，即黎曼（Riemann）ζ 函数（zeta function）的第一个值；所有 $\zeta(2k)$ 都是 π^{2k} 的有理数倍，但人们对 $\zeta(3)$ 所知甚少。若想了解极限与夹逼定理背后的分析学，可以读 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。