详细解答

STEP III 2018，第 6 题

纯数学 · 复数与几何

STEP III 2018，第 6 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/18-s3-q6

关键思路

一个复数（complex number）是实数，当且仅当它等于自己的共轭（conjugate），因此三点共线（collinear）的条件可以化为一条联系 z 与 z^* 的方程。在单位圆（unit circle）上有 $a^* = 1/a$，借此可以消去圆上各点的共轭，于是弦（chord）上任意一点 q 都满足一条线性方程。之后每个结果，都是写出两条这样的弦方程，再将它们相加或相减而得。

解答

第 (i) 部分

由于 A、Q、C 共线且 $A \neq C$，点 Q 等于 A 加上由 A 到 C 的向量的某个实数倍：对某个实数 t，有 $q - a = t(c - a)$。因为 $c \neq a$，可以相除，所以

$$\frac{q-a}{c-a} = t \quad \text{是实数。}$$

实数等于其共轭，故

$$\frac{q-a}{c-a} = \frac{q^*-a^*}{c^*-a^*},$$

其中 $c^* - a^* \neq 0$，因为 $c \neq a$。交叉相乘得 $(c-a)(q^*-a^*) = (c^*-a^*)(q-a)$，即所求。

现设 $aa^* = cc^* = 1$，于是 $a^* = 1/a$，$c^* = 1/c$。那么

$$c^* - a^* = \frac{1}{c} - \frac{1}{a} = \frac{a-c}{ac} = -\frac{c-a}{ac},$$

而上一条方程变成

$$(c-a)\left(q^* - \frac{1}{a}\right) = -\frac{c-a}{ac}(q-a).$$

两边除以 $c-a\neq 0$，再乘以 $-ac$，得

$$-ac\,q^*+c=q-a,\qquad \text{即}\qquad q+ac\,q^*=a+c.$$

这就是弦 AC 的方程：经过 A 和 C 的直线上每一点 q 都满足它。

第 (ii) 部分

由于 A、B、C、D 按逆时针次序排列，AC 与 BD 是圆内接（inscribed）凸四边形（convex quadrilateral）的两条对角线（diagonal），因此它们相交于圆内部的一点 Q。特别地，Q 与这四点都不同，所以第 (i) 部分适用于直线 AC 和 BD：

$$q+ac\,q^*=a+c,$$
$$q+bd\,q^*=b+d.$$

第一式减去第二式，消去 q：

$$(ac-bd)\,q^*=(a+c)-(b+d). \tag{1}$$

? **想一想** 我们已得到关于 q^* 的方程；怎样才能得到一条关于 q 的方程与之相加？

对 (1) 取共轭，并再次利用 $a^*=1/a$ 等关系。左边变成

$$\Big(\frac{1}{ac}-\frac{1}{bd}\Big)q=\frac{bd-ac}{abcd}\,q,$$

右边变成

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}-\frac{1}{b}-\frac{1}{d}=\frac{a+c}{ac}-\frac{b+d}{bd}=\frac{bd(a+c)-ac(b+d)}{abcd}.$$

两边乘以 $-abcd$，得

$$(ac-bd)\,q=ac(b+d)-bd(a+c). \tag{2}$$

将 (1) 与 (2) 相加，

$$(ac-bd)(q+q^*)=a+c-b-d+abc+acd-abd-bcd.$$

把右边各项分组，

$$(a-b)+(acd-bcd)+(c-d)+(abc-abd)=(a-b)(1+cd)+(c-d)(1+ab),$$

即得所求结果。

第 (iii) 部分

直线 AB 与 CD 是内接四边形的一对对边，所以它们的交点 P 在圆外。因此 P 与 A、B 不同，也与 C、D 不同。对共线的三点 A、P、B 应用第 (i) 部分，得 $p + ab\,p^* = a + b$。由于 p 是实数，$p^* = p$，所以

$$p(1 + ab) = a + b.$$

同理，由 C、P、D 得

$$p(1 + cd) = c + d.$$

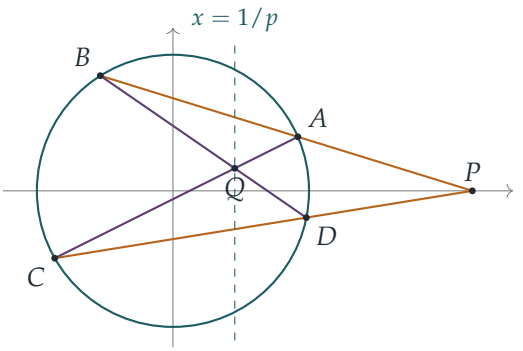
现将第 (ii) 部分的最终结果乘以 p，并代入这两条方程：

$$\begin{aligned} p\,(ac - bd)(q + q^*) &= (a - b)\,p(1 + cd) + (c - d)\,p(1 + ab) \\ &= (a - b)(c + d) + (c - d)(a + b) \\ &= (ac + ad - bc - bd) + (ac + bc - ad - bd) \\ &= 2(ac - bd). \end{aligned}$$

由于 $ac - bd \neq 0$，可以两边除以它，得 $p(q + q^*) = 2$，即所求。

事实上，这里 $ac - bd$ 不可能为零。若 $ac = bd$，则 (1) 迫使 $a + c = b + d$ 亦成立，于是 $z^2 - (a+c)z + ac$ 与 $z^2 - (b+d)z + bd$ 是同一个二次式 (quadratic)。那么 $\{a, c\} = \{b, d\}$，与各点互不相同矛盾。

由于 $q + q^* = 2\,\mathrm{Re}\,q$，这个结果说明 $\mathrm{Re}\,q = 1/p$。无论经过 P 的两条直线怎样选取，对角线的交点 Q 都落在固定的铅垂线 $x = 1/p$ 上。



验算

- 对称情况：取 A、B 位于角度 $20°$、$70°$，C、D 位于 $-70°$、$-20°$。由关于实轴的反射对称，P 和 Q 都是实数，而结果表明 $pq = 1$。设 $a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$，$b = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}$，由公式 $p = (a + b)/(1 + ab)$ 得 $p = \cos\frac{\alpha-\beta}{2} / \cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \cos 25° / \cos 45° \approx 1.2817$。直接求 AC 与实轴的交点作为 q：$q \approx 0.7802$，而 $pq \approx 1.0000$。

- 图中取 $p = 2.2$。对角线相交于 $x \approx 0.4545 = 1/2.2$，与预测相符。三条恒等式亦已用电脑在数千个随机构形上验证。

常见错误

- 忘记 $ac - bd$ 取共轭后得到的是 $1/(ac) - 1/(bd)$，而不是 $ac - bd$；必须小心消去因子 $abcd$。
- 除以 $c - a$ 或 $ac - bd$ 时没有说明它为何不为零。

STEP 之外

这里 Q 位于 P 关于该圆的极线（polar）上：对于单位圆外、与圆心距离为 p 的点 P，其极线是垂直于 OP、与 O 距离为 $1/p$ 的直线。这是射影几何（projective geometry）中布洛卡定理（Brocard's theorem）的一部分，而背后的映射 $P \mapsto 1/p^*$ 正是关于该圆的反演（inversion），它是复分析（complex analysis）和几何中的重要工具。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《可视化复分析》）对反演及阿冈图（Argand diagram）的几何有精彩的阐述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。