详细解答

STEP III 2018，第 5 题

纯数学 · 算术几何平均不等式

STEP III 2018，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/18-s3-q5

关键思路

这是用归纳法（induction）证明 AM–GM 不等式（算术－几何平均不等式，AM–GM inequality），但有一个巧妙之处：我们不直接证明 $A_n \geq G_n$，而是证明每加入一个新的数，加权差距 $n(A_n - G_n)$ 都不会减少。当 $n = 1$ 时差距为零，因此它一直保持非负。λ_k 的选取使 G_{k+1} 成为 G_k 的一个简单倍数，从而把整个比较化为一个单变量的多项式不等式（polynomial inequality）。

解答

第 (i) 部分

有两个事实把第 k 步和第 $k+1$ 步联系起来。就和而言，

$$(k+1)A_{k+1} = a_1 + \cdots + a_k + a_{k+1} = kA_k + a_{k+1}.$$

就积而言，$G_k^k = a_1 a_2 \cdots a_k$，而由 λ_k 的定义得 $a_{k+1} = G_k \lambda_k^{k+1}$。所以

$$G_{k+1}^{k+1} = G_k^k \, a_{k+1} = G_k^k \cdot G_k \lambda_k^{k+1} = (G_k \lambda_k)^{k+1}, \qquad \text{所以} \qquad G_{k+1} = G_k \lambda_k,$$

这里取正的 $(k+1)$ 次方根，因为 $G_k > 0$ 且 $\lambda_k > 0$。这正是 λ_k 要这样定义的原因。

现在比较两边：

$$\begin{aligned}(k+1)(A_{k+1} - G_{k+1}) - k(A_k - G_k) &= kA_k + a_{k+1} - (k+1)G_{k+1} - kA_k + kG_k \\ &= G_k \lambda_k^{k+1} - (k+1)G_k \lambda_k + kG_k \\ &= G_k(\lambda_k^{k+1} - (k+1)\lambda_k + k).\end{aligned}$$

由于 $G_k > 0$，左边 ≥ 0 当且仅当括号内的式子 ≥ 0。这就是所要求的等价关系。

第 (ii) 部分

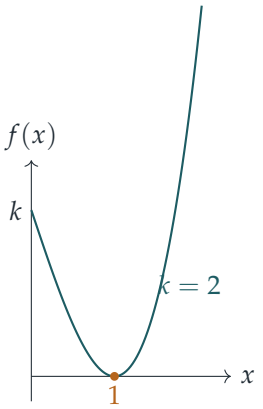
求导数（derivative），

$$f'(x) = (k+1)x^k - (k+1) = (k+1)(x^k - 1).$$

当 $0 < x < 1$ 时有 $x^k < 1$，故 $f'(x) < 0$；当 $x > 1$ 时有 $x^k > 1$，故 $f'(x) > 0$。因此 f 在 $(0, 1]$ 上严格递减（strictly decreasing），在 $[1, \infty)$ 上严格递增，它在 $x > 0$ 上的最小值是

$$f(1) = 1 - (k+1) + k = 0.$$

所以对所有 $x > 0$ 都有 $f(x) \geq 0$。此外，若 $x \neq 1$，则由 1 两侧的严格单调性得 $f(x) > f(1) = 0$。所以 $f(x) = 0$ 仅当 $x = 1$ 时成立，而 $f(1) = 0$ 给出逆命题。



（当 $k = 2$ 时，$f(x) = x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$；在 $x = 1$ 的二重根（double root）处，图像刚好与轴相切。）

第 (iii) 部分

对每个正整数 n，记 $d_n = n(A_n - G_n)$。

(a) 由第 (ii) 部分，取 $x = \lambda_k > 0$，得 $\lambda_k^{k+1} - (k+1)\lambda_k + k \geq 0$，所以由第 (i) 部分

$$d_{k+1} \geq d_k \qquad \text{对每个} k \geq 1.$$

又 $A_1 = a_1 = G_1$，所以 $d_1 = 0$。因此

$$0 = d_1 \leq d_2 \leq d_3 \leq \cdots \leq d_n,$$

所以 $d_n \geq 0$，两边除以 $n > 0$，便得对所有 n 都有 $A_n \geq G_n$。

(b)

想一想 若 $A_n = G_n$，这对整条不等式链中较早的各步（而不只是最后一步）说明了甚么?

若 $A_n = G_n$，则 $d_n = 0$，不等式链变成 $0 = d_1 \le d_2 \le \cdots \le d_n = 0$。一条以 0 开始并以 0 结束的非递减链必然是常数，所以对每个 $k = 1, \ldots, n-1$ 都有 $d_{k+1} = d_k$。由第 (i) 部分的恒等式，这表示 $G_k f(\lambda_k) = 0$，而因为 $G_k > 0$，所以 $f(\lambda_k) = 0$。由第 (ii) 部分得 $\lambda_k = 1$，即对每个 $k = 1, \ldots, n-1$ 都有 $a_{k+1} = G_k$。

现在对 k 用归纳法论证。当 $k = 1$ 时：$a_2 = G_1 = a_1$。若 $a_1 = \cdots = a_k = a$，则 $G_k = (a^k)^{1/k} = a$，所以 $a_{k+1} = G_k = a$。因此 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$，得证。

验算

取 $a_1, a_2, a_3 = 1, 4, 16$。则 $A_2 = 2.5, G_2 = 2, A_3 = 7, G_3 = 4$，所以 $d_1, d_2, d_3 = 0, 1, 9$：正如所料是递增的。这里 $\lambda_2 = (16/2)^{1/3} = 2$，而 $G_2 f(\lambda_2) = 2(8 - 6 + 2) = 8 = d_3 - d_2$，这印证了第 (i) 部分的恒等式。用电脑在数以千计的随机正数数列上检验该恒等式及 $d_{k+1} \ge d_k$，并没有发现任何例外。

常见错误

- 在第 (i) 部分只证明了一个方向。把差写成 $G_k f(\lambda_k)$ 就能同时得到两个方向，因为 $G_k > 0$。
- 在 (iii)(b) 中只推出 $\lambda_{n-1} = 1$。你需要整条链的每一步都取等号，而这是由链从 $d_1 = 0$ 开始得出的。
- 在应用第 (ii) 部分之前忘记说明为何 $\lambda_k > 0$，而第 (ii) 部分只涵盖 $x > 0$ 的情况。

STEP 之外

不等式 $x^{k+1} - (k+1)x + k \ge 0$ 是伯努利不等式（Bernoulli's inequality）的特例，而 AM–GM 本身则是琴生不等式（Jensen's inequality）应用于凹函数（concave function）$\ln x$ 的特例。这些凸性不等式是大学一年级分析学的基本工具。尝试 AM–GM 的其他几种证明，包括柯西（Cauchy）的“前进－后退”归纳法，是很好的练习；Bartle 和 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis*（《实分析导论》）涵盖了相关的分析学背景。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。