详细解答

STEP III 2018，第 4 题

纯数学 · 双曲线的切线

STEP III 2018，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/18-s3-q4

关键思路

求切线最快的方法是直接用标准结果：$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ 在 (x_1, y_1) 处的切线（tangent）是 $xx_1/a^2 - yy_1/b^2 = 1$。之后的一切都只是两条直线相交，所以只需解几组一次联立方程，再整理三角式子。在第 (ii) 部分，垂直条件是 $\sin\theta$ 与 $\sin\phi$ 之间一条涉及 b 的关系式，正正是它让我们能把 b 从式子中消去，最后再以 $a^2 - b^2$ 的形式把它带回来。和差化积公式（sum-to-product formulae）能令最后的代数运算变得简短。

解答

P 点的切线

对 $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ 进行隐函数求导（implicit differentiation），得 $\dfrac{2x}{a^2} - \dfrac{2y}{b^2}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$，因此在 (x_1, y_1) 处的斜率（gradient）是 $\dfrac{b^2x_1}{a^2y_1}$，而切线为

$$y - y_1 = \frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x - x_1) \iff \frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1,$$

这里用到 (x_1, y_1) 在曲线上这一事实。（这个形式同样适用于顶点（vertex），即 $y_1 = 0$ 而切线是铅垂线的情况。）代入 $x_1 = a\sec\theta$、$y_1 = b\tan\theta$：

$$\frac{x\sec\theta}{a} - \frac{y\tan\theta}{b} = 1.$$

两边乘以 $ab\cos\theta$（它不等于零，因为 $\sec\theta$ 存在），得

$$bx - ay\sin\theta = ab\cos\theta,$$

即所求。

第 (i) 部分

题目给出的两条直线就是渐近线（asymptote）$y = \pm\frac{b}{a}x$。

在 S 点，$ay = bx$。把 $ay = bx$ 代入切线方程，得 $bx(1-\sin\theta) = ab\cos\theta$，所以

$$S = \left(\frac{a\cos\theta}{1-\sin\theta}, \frac{b\cos\theta}{1-\sin\theta}\right).$$

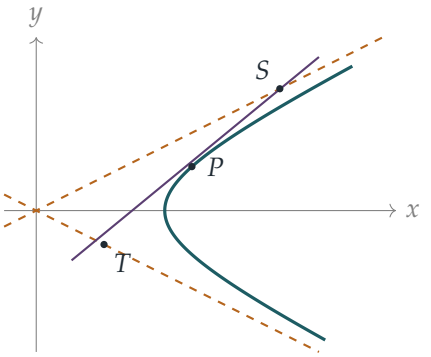
在 T 点，$ay = -bx$，得 $bx(1+\sin\theta) = ab\cos\theta$，所以

$$T = \left(\frac{a\cos\theta}{1+\sin\theta}, -\frac{b\cos\theta}{1+\sin\theta}\right).$$

两个分母都不为零，因为 $\cos\theta \neq 0$ 意味着 $\sin\theta \neq \pm 1$。将两者相加，并利用 $(1-\sin\theta)(1+\sin\theta) = \cos^2\theta$：

$$x_S + x_T = a\cos\theta \cdot \frac{(1+\sin\theta)+(1-\sin\theta)}{\cos^2\theta} = \frac{2a}{\cos\theta} = 2a\sec\theta,$$
$$y_S + y_T = b\cos\theta \cdot \frac{(1+\sin\theta)-(1-\sin\theta)}{\cos^2\theta} = \frac{2b\sin\theta}{\cos\theta} = 2b\tan\theta.$$

因此 ST 的中点（mid-point）是 $(a\sec\theta, b\tan\theta)$：**$ST$ 的中点正是 P 本身**。任一点的切线被两条渐近线所截的线段，都在切点处被平分。



第 (ii) 部分

垂直条件。把 P 点的切线写成 $ay\sin\theta = bx - ab\cos\theta$，当 $\sin\theta \neq 0$ 时其斜率为 $\dfrac{b}{a\sin\theta}$。（若 $\sin\theta = 0$，切线是铅垂线，那么 Q 点的切线就必须是水平线；但由于 $b/(a\sin\phi) \neq 0$，没有任何切线是水平的。所以 $\sin\theta \neq 0$，同理 $\sin\phi \neq 0$。）两条切线互相垂直（perpendicular），需要两斜率之积为 -1：

$$\frac{b^2}{a^2\sin\theta\sin\phi} = -1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sin\theta\sin\phi = -\frac{b^2}{a^2}. \tag{$*$}$$

特别地，$\sin\theta$ 与 $\sin\phi$ 异号，所以 $\sin\phi - \sin\theta \neq 0$。留意 $(*)$ 需要 $b^2/a^2 < 1$，这正是用到 $a > b$ 的地方。

交点。 点 (x,y) 满足

$$bx - ay\sin\theta = ab\cos\theta, \qquad bx - ay\sin\phi = ab\cos\phi.$$

以第一式减去第二式，得 $ay(\sin\phi - \sin\theta) = ab(\cos\theta - \cos\phi)$。把第一式乘以 $\sin\phi$、第二式乘以 $\sin\theta$，再相减，得 $bx(\sin\phi - \sin\theta) = ab(\sin\phi\cos\theta - \cos\phi\sin\theta) = ab\sin(\phi - \theta)$。因此

$$x = \frac{a\sin(\phi-\theta)}{\sin\phi - \sin\theta}, \qquad y = \frac{b(\cos\theta - \cos\phi)}{\sin\phi - \sin\theta}.$$

想一想 这些式子仍然含有 b。怎样才能只用 a、θ 和 ϕ 表示 x^2 和 y^2？这些分式又能否化简？

条件 $(*)$ 表示 $b^2 = -a^2\sin\theta\sin\phi$，所以取平方就能消去 b。为了化简，设 $\alpha = \frac{1}{2}(\phi+\theta)$ 及 $\beta = \frac{1}{2}(\phi-\theta)$。和差化积公式给出

$$\sin\phi - \sin\theta = 2\cos\alpha\sin\beta, \qquad \cos\theta - \cos\phi = 2\sin\alpha\sin\beta, \qquad \sin(\phi-\theta) = 2\sin\beta\cos\beta,$$

而由于 $\sin\phi - \sin\theta \neq 0$，所以 $\cos\alpha\sin\beta \neq 0$。约去 $2\sin\beta$，

$$x = \frac{a\cos\beta}{\cos\alpha}, \qquad y = b\tan\alpha,$$

因此

$$x^2 = \frac{a^2\cos^2(\frac{1}{2}(\phi-\theta))}{\cos^2(\frac{1}{2}(\phi+\theta))},$$
$$y^2 = -a^2\sin\theta\sin\phi\,\tan^2(\tfrac{1}{2}(\phi+\theta)).$$

等价地，不用半角可写成

$$x^2 = \frac{a^2\sin^2(\phi-\theta)}{(\sin\phi-\sin\theta)^2}, \qquad y^2 = -\frac{a^2\sin\theta\sin\phi\,(\cos\theta-\cos\phi)^2}{(\sin\phi-\sin\theta)^2}.$$

圆。 我们还需要以 α 和 β 表示 $\sin\theta\sin\phi$。由于 $\theta = \alpha - \beta$ 及 $\phi = \alpha + \beta$，

$$\begin{aligned}\sin\theta\sin\phi &= \sin^2\alpha\cos^2\beta - \cos^2\alpha\sin^2\beta\\ &= (1-\cos^2\alpha)\cos^2\beta - \cos^2\alpha(1-\cos^2\beta) = \cos^2\beta - \cos^2\alpha.\end{aligned}$$

设 $k = \sin\theta\sin\phi = \cos^2\beta - \cos^2\alpha$。于是，利用 $\tan^2\alpha = (1-\cos^2\alpha)/\cos^2\alpha$，

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= \frac{a^2}{\cos^2\alpha}\Big[\cos^2\beta - k\,(1-\cos^2\alpha)\Big]\\ &= \frac{a^2}{\cos^2\alpha}\Big[(\cos^2\beta - k) + k\cos^2\alpha\Big]\\ &= \frac{a^2}{\cos^2\alpha}\Big[\cos^2\alpha + k\cos^2\alpha\Big] \qquad \text{因为 } \cos^2\beta - k = \cos^2\alpha\\ &= a^2(1+k) = a^2 + a^2\sin\theta\sin\phi = a^2 - b^2,\end{aligned}$$

最后一步用到 $(*)$。所以任意两条互相垂直的切线的交点都在圆 $x^2+y^2=a^2-b^2$ 上，即所求。

验算

- 取 $a=2$、$b=1$、$\theta=\frac{\pi}{6}$、$\phi=-\frac{\pi}{6}$。那么 $\sin\theta\sin\phi=-\frac{1}{4}=-b^2/a^2$，所以两切线互相垂直（斜率分别为 1 和 -1）。此时 $\alpha=0$、$\beta=-\frac{\pi}{6}$，所以 $x=2\cos\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$、$y=0$，而 $x^2+y^2=3=a^2-b^2$。直接验证：切线 $x-y=\sqrt{3}$ 与 $x+y=\sqrt{3}$ 的确相交于 $(\sqrt{3},0)$。
- 在第 (i) 部分，当 $\theta\to 0$ 时，切线变成铅垂线 $x=a$，它与渐近线相交于 $(a,\pm b)$，中点为 $(a,0)=P$。
- 以上所有公式，包括 (i) 中的中点以及 $x^2+y^2=a^2-b^2$，都已用电脑对数以千计随机选取的 $a>b>0$ 及互相垂直的 θ,ϕ 组合，直接解两条切线方程加以确认。

常见错误

- 在 x^2 和 y^2 的式子中保留 b：题目要求只用 a、θ 和 ϕ 表示，所以必须用 $(*)$ 消去 b^2。
- 移项出错，把切线斜率写成 $-b/(a\sin\theta)$；应检查在第一象限的点处斜率是否为正。
- 除以 $\sin\phi-\sin\theta$ 时没有说明它为何不等于零。

STEP 之外

第 (ii) 部分中的圆是双曲线（hyperbola）的*准圆*（director circle）：即从该点引出的两条切线互相垂直的点的轨迹（locus）。对于椭圆（ellipse），准圆是 $x^2+y^2=a^2+b^2$；而对于 $a<b$ 的双曲线，则根本没有实的准圆，这就是题目坚持 $a>b$ 的原因。第 (i) 部分的平分性质让我们初步窥见圆锥曲线（conics）的射影几何（projective geometry）与仿射几何（affine geometry）；在这些理论中，切线、渐近线以及极点与极线（poles and polars）都以统一的方式处理。若想找完全同类风格的题目，可以试读 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《数学进阶题》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。