详细解答

STEP III 2018，第 3 题

纯数学 · 欧拉微分方程

STEP III 2018，第 3 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/18-s3-q3

关键思路

左边是一条欧拉方程（Euler equation，又称等维方程，equidimensional equation）：每个导数都配上相应次数的 x 幂。把嵌套形式 $(*)$ 展开并比较系数（comparing coefficients），就能确定 a、b 和 c。方程一旦写成这个形式，便可以通过两次简单的积分求解，每次剥去一层导数；而分情况讨论的需要，正正出现在其中一个积分是 x^{-1} 的积分、因而产生对数的时候。

解答

全题我们都在 $x > 0$ 上讨论，使 x 的所有幂都有定义。

求 a、b 和 c

由乘积法则（product rule），

$$(x^c y)' = x^c y' + cx^{c-1}y, \qquad \text{所以} \qquad x^b(x^c y)' = x^{b+c}y' + cx^{b+c-1}y.$$

再求导一次，

$$(x^b(x^c y)')' = x^{b+c}y'' + (b+c)x^{b+c-1}y' + cx^{b+c-1}y' + c(b+c-1)x^{b+c-2}y.$$

乘以 x^a，并选取 $a+b+c=2$，得

$$x^a(x^b(x^c y)')' = x^2y'' + (b+2c)\,xy' + c(b+c-1)\,y.$$

这与题目所给的左边吻合，只要

$$b + 2c = 1 - 2p, \qquad c(b+c-1) = p^2 - q^2.$$

由第一式得 $b+c-1=-2p-c$，于是第二式变为 $-c^2-2pc=p^2-q^2$，即 $(c+p)^2=q^2$。取 $c+p=q$，

$$c=q-p,\qquad b=1-2p-2c=1-2q,\qquad a=2-b-c=1+p+q.$$

因此方程可写成

$$x^{1+p+q}\left(x^{1-2q}(x^{q-p}y)'\right)'=\mathrm{f}(x),$$

此即所求。（另一个根 $c+p=-q$ 给出的结果只是把 q 换成 $-q$，两者并无分别，因为方程中只出现 q^2。）

第 (i) 部分

当 $\mathrm{f}=0$ 时，我们可以除以 $x^{1+p+q}\neq 0$：

$$\left(x^{1-2q}(x^{q-p}y)'\right)'=0\quad\Longrightarrow\quad x^{1-2q}(x^{q-p}y)'=A\quad\Longrightarrow\quad (x^{q-p}y)'=Ax^{2q-1},$$

其中 A 为常数。下一次积分的做法，取决于幂 $2q-1$ 是否等于 -1。

> **想一想** 为甚么 p 的值在这里不会引出不同的情况?

我们要积分的指数是 $2q-1$，它与 p 无关；p 只通过因子 x^{q-p} 出现，而这个因子我们最后才除去。所以情况的划分只取决于 q。

情况 $q\neq 0$。积分得 $x^{q-p}y=\dfrac{A}{2q}x^{2q}+B$，再乘以 x^{p-q}（并把常数 $\frac{A}{2q}$ 重新记作 A），

$$y=Ax^{p+q}+Bx^{p-q}.$$

情况 $q=0$。此时 $(x^{-p}y)'=Ax^{-1}$，所以 $x^{-p}y=A\ln x+B$，从而

$$y=x^p\,(A\ln x+B).$$

每种情况都有两个任意常数（arbitrary constant），正如二阶方程所应有的。

第 (ii) 部分

这是 $q=0$、$\mathrm{f}(x)=x^n$ 的情况，所以 $a=1+p$、$b=1$、$c=-p$，方程为

$$x^{1+p}\left(x(x^{-p}y)'\right)'=x^n\quad\Longleftrightarrow\quad\left(x(x^{-p}y)'\right)'=x^{n-p-1}.$$

第一次积分涉及 x^{n-p-1}，它恰好在 $n=p$ 时等于 x^{-1}。

情况 $n\neq p$。积分一次，

$$x(x^{-p}y)'=\frac{x^{n-p}}{n-p}+A\quad\Longrightarrow\quad(x^{-p}y)'=\frac{x^{n-p-1}}{n-p}+\frac{A}{x}.$$

由于 $n-p\neq 0$，再积分得

$$x^{-p}y=\frac{x^{n-p}}{(n-p)^2}+A\ln x+B,\qquad \text{所以}\qquad y=\frac{x^n}{(n-p)^2}+x^p\,(A\ln x+B).$$

情况 $n=p$。此时第一次积分便产生对数：

$$x(x^{-p}y)'=\ln x+A\quad\Longrightarrow\quad (x^{-p}y)'=\frac{\ln x}{x}+\frac{A}{x}.$$

由于 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{2}(\ln x)^2=\frac{\ln x}{x}$，

$$x^{-p}y=\tfrac{1}{2}(\ln x)^2+A\ln x+B,\qquad \text{所以}\qquad y=x^p\left(\tfrac{1}{2}(\ln x)^2+A\ln x+B\right).$$

在两种情况中，含 A 和 B 的部分正是第 (i) 部分中 $q=0$ 时的余函数（complementary function），理应如此。

验算

- 取 $p=q=0$：方程为 $x^2y''+xy'=0$，即 $(xy')'=0$，所以 $y=A\ln x+B$，与第 (i) 部分吻合。
- 在齐次方程（homogeneous equation）中试代 $y=x^m$：$m(m-1)+(1-2p)m+p^2-q^2=(m-p)^2-q^2$，所以 $m=p\pm q$，当 $q=0$ 时为重根（repeated root），与上面所得一致。
- 在第 (ii) 部分中取 $n=p=1$，$y=\frac{1}{2}x(\ln x)^2$ 有 $y'=\frac{1}{2}(\ln x)^2+\ln x$ 及 $y''=\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}$，所以 $x^2y''-xy'+y=x\ln x+x-\frac{1}{2}x(\ln x)^2-x\ln x+\frac{1}{2}x(\ln x)^2=x$，此即所求。
- 所有解亦已用电脑在大量随机的 p、q、n 和 x 值下代回方程验证；残差（residual）在舍入误差范围内为零（约 10^{-6}）。

常见错误

- 在 (i) 中遗漏 $q=0$ 的情况，或在 (ii) 中遗漏 $n=p$ 的情况；这些情况下要用 $\int x^{-1}\,\mathrm{d}x=\ln x$ 代替幂法则。
- 在第一步遗漏积分常数：正是它产生第二个线性独立的解。
- 没有说明理由便假设 $a+b+c=2$：这是为了使 y'' 乘以 x^2 所必需的。

STEP 之外

把二阶算子写成一阶算子的复合，称为把算子因式分解（factorising），这正是降阶法（reduction of order）以及量子力学中阶梯算子（ladder operators）背后的想法。代换

$x = \mathrm{e}^t$ 可把任何欧拉方程变成常系数方程，这就解释了重根 $m = p$ 以及 $\ln x$（即 t）这个因子的出现。Boyce 和 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《基础微分方程》）论述了欧拉方程和降阶法。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。