详细解答

# STEP III 2018，第 2 题

纯数学 · 埃尔米特多项式

**STEP III 2018，第 2 题**

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/18-s3-q2

## 关键思路

把定义倒过来看：它说明 $z$ 的 $n$ 阶导数（derivative）等于 $(-1)^n y_n z$。将这式再微分一次，并与 $n+1$ 时的同一个式子比较，一行便得出第 (i) 部分。之后，第 (i) 部分就成为我们微分递推关系（recurrence）的工具，推动第 (ii) 部分的归纳法（induction）。最后的不等式（inequality）则由第 (ii) 部分的恒等式（identity），再用一次非常简短的归纳法得出。

## 解答

全文中 $z = \mathrm{e}^{-x^2}$，故 $z' = -2xz$，而且对每个 $x$ 都有 $z > 0$。将定义移项，得

$$\frac{\mathrm{d}^n z}{\mathrm{d}x^n} = (-1)^n y_n z \qquad (n \geq 0),$$

由于 $y_0 = 1$，此式在 $n = 0$ 时亦成立。

### 第 (i) 部分

利用乘积法则（product rule）及 $z' = -2xz$，将上面列出的等式微分：

$$\frac{\mathrm{d}^{n+1} z}{\mathrm{d}x^{n+1}} = (-1)^n (y_n' z + y_n z') = (-1)^n (y_n' - 2x y_n) z.$$

但以 $n+1$ 代替 $n$ 的同一等式指出，左方等于 $(-1)^{n+1} y_{n+1} z$。令两者相等，再除以永不为零的 $(-1)^n z$，得

$$y_n' - 2x y_n = -y_{n+1}, \qquad \text{即} \qquad \frac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}x} = 2x y_n - y_{n+1},$$

此即所求。以上推导并不需要 $n \geq 1$，因此结果在 $n = 0$ 时亦成立；下面会用到这一点。

留待后用：$z' = -2xz$ 及 $z'' = (4x^2 - 2)z$，故 $y_1 = 2x$ 及 $y_2 = 4x^2 - 2$。

**第 (ii) 部分**

**基本情况。** 当 $n = 1$ 时，我们需要 $y_2 = 2xy_1 - 2y_0$，而确实 $2x \cdot 2x - 2 = 4x^2 - 2 = y_2$。

**归纳步骤。** 假设对某个 $k \geq 1$，

$$y_{k+1} = 2xy_k - 2ky_{k-1}. \tag{$*$}$$

我们想得到往后一步的同一关系，所以将 $(*)$ 微分：

$$y'_{k+1} = 2y_k + 2xy'_k - 2ky'_{k-1}.$$

> **想一想** 怎样消去这些导数？当 $k = 1$ 时，第 (i) 部分可以用于 $y_{k-1}$ 吗？

利用第 (i) 部分替换每一个导数。当 $k = 1$ 时，$y'_{k-1}$ 对应 $n = 0$ 的情况，而我们已指出这情况同样成立。于是得

$$2xy_{k+1} - y_{k+2} = 2y_k + 2x(2xy_k - y_{k+1}) - 2k(2xy_{k-1} - y_k),$$

所以

$$y_{k+2} = 4xy_{k+1} - 4x^2y_k - 2(k+1)y_k + 4kx\,y_{k-1}.$$

含 $y_{k-1}$ 的项再用一次假设 $(*)$ 消去：$2ky_{k-1} = 2xy_k - y_{k+1}$，故 $4kx\,y_{k-1} = 4x^2y_k - 2xy_{k+1}$。代入后，

$$\begin{aligned} y_{k+2} &= 4xy_{k+1} - 4x^2y_k - 2(k+1)y_k + 4x^2y_k - 2xy_{k+1} \\ &= 2xy_{k+1} - 2(k+1)y_k, \end{aligned}$$

这正是以 $k+1$ 代替 $k$ 的关系。由归纳法，对所有 $n \geq 1$，$y_{n+1} = 2xy_n - 2ny_{n-1}$。

**推论。** 使用递推关系两次，一次在 $n$，一次在 $n+1$，使两个乘积中都出现 $2xy_ny_{n+1}$ 这一项：

$$\begin{aligned} y_{n+1}^2 &= y_{n+1}(2xy_n - 2ny_{n-1}) = 2xy_ny_{n+1} - 2ny_{n-1}y_{n+1}, \\ y_ny_{n+2} &= y_n(2xy_{n+1} - 2(n+1)y_n) = 2xy_ny_{n+1} - 2(n+1)y_n^2. \end{aligned}$$

相减后，含 $x$ 的项互相抵消：

$$y_{n+1}^2 - y_ny_{n+2} = 2(n+1)y_n^2 - 2ny_{n-1}y_{n+1} = 2n(y_n^2 - y_{n-1}y_{n+1}) + 2y_n^2,$$

此即所求的恒等式。

### 第 (iii) 部分

记 $D_n = y_n^2 - y_{n-1}y_{n+1}$。第 (ii) 部分的恒等式可写成

$$D_{n+1} = 2nD_n + 2y_n^2 \qquad (n \geq 1).$$

我们用归纳法证明对所有 $n \geq 1$，$D_n > 0$。当 $n = 1$ 时，

$$D_1 = y_1^2 - y_0y_2 = 4x^2 - (4x^2 - 2) = 2 > 0$$

对每个 $x$ 都成立。若对某个 $n \geq 1$ 有 $D_n > 0$，则由于 $n \geq 1$，$2nD_n > 0$，又 $2y_n^2 \geq 0$，故 $D_{n+1} > 0$。因此对所有 $n \geq 1$ 及所有实数 $x$，$y_n^2 - y_{n-1}y_{n+1} > 0$，此即所求。

注意，要得到严格不等式，我们需要 $D_n$ 严格为正：单靠 $y_n^2$ 是不够的，因为在 $y_n$ 的零点上它可以等于零。

## 验算

- 由递推关系，$y_3 = 2x(4x^2 - 2) - 4 \cdot 2x = 8x^3 - 12x$。直接将 $z'' = (4x^2 - 2)z$ 微分，得 $z''' = (-8x^3 + 12x)z$，与 $-y_3z$ 吻合。
- 第 (i) 部分在 $n = 1$ 时：$y_1' = 2$，而 $2x \cdot 2x - (4x^2 - 2) = 2$。✓
- 第 (iii) 部分在 $n = 2$ 时：$D_2 = (4x^2 - 2)^2 - 2x(8x^3 - 12x) = 8x^2 + 4$，这是正数，并且等于 $2D_1 + 2y_1^2 = 4 + 8x^2$，与恒等式的预测一致。
- 以电脑在多个有理数 $x$ 值（包括接近各 $y_n$ 零点之处）检验递推关系及不等式直至 $n = 14$，结果完全吻合。

## 常见错误

- 忘记归纳步骤要对 $y_{k-1}$ 使用第 (i) 部分，而在 $k = 1$ 时这是指 $y_0$：题目只要求第 (i) 部分对 $n \geq 1$ 成立，所以要另外检查 $n = 0$ 的情况。
- 在第 (iii) 部分只得出 $D_{n+1} \geq 0$：严格不等式来自 $D_n > 0$，而不是来自 $y_n^2$。

## STEP 之外

函数 $y_n$ 就是埃尔米特多项式（Hermite polynomials）$H_n(x)$，而关系式 $\mathrm{d}^n z/\mathrm{d}x^n = (-1)^n H_n z$ 是它们的罗德里格公式（Rodrigues formula）。它们在整条实数线上以 $\mathrm{e}^{-x^2}$ 为权函数正交（orthogonal），并给出量子谐振子（quantum harmonic oscillator）的能量状态。第 (iii) 部分的不等式是一个图兰型不等式（Turán-type inequality），这类结果对

许多经典正交多项式都成立。Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）通过级数解处理埃尔米特方程。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。