详细解答

STEP III 2018，第 13 题

概率与统计 · 泊松分布

> **STEP III 2018，第 13 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/18-s3-q13

关键思路

把 $t=-1$ 代入概率母函数（probability generating function），会令每个概率带上符号 $(-1)^r$，所以把 $G(1)$ 和 $G(-1)$ 取平均，奇数项便互相抵消，只留下偶数项。用四次单位根（fourth roots of unity）$1,-1,\mathrm{i},-\mathrm{i}$ 作同样的筛选，就能抽出 4 的倍数。每个新的母函数一旦写成闭合形式（closed form），平均值（mean）就只是它在 $t=1$ 的导数，问题便化为比较几个初等函数。

解答

记 $p_r=\mathrm{P}(X=r)$，于是 $G(t)=\sum_{r\geq 0}p_r t^r$。

偶数值。 把级数在 $t=1$ 和 $t=-1$ 的值相加，

$$G(1)+G(-1)=\sum_{r\geq 0}p_r\left(1+(-1)^r\right)=2\sum_{r\text{ 为偶数}}p_r,$$

因为当 r 为偶数时 $1+(-1)^r$ 等于 2，当 r 为奇数时等于 0。两边除以 2 即得所求结果。（由于 $\sum p_r=1$，两个级数都绝对收敛（converge absolutely）。）

泊松（Poisson）分布的母函数。 当 $p_r=\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^r/r!$ 时，

$$G(t)=\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{r\geq 0}\frac{(\lambda t)^r}{r!}=\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda t}=\mathrm{e}^{-\lambda(1-t)},$$

这里用了指数级数（exponential series），它对所有 t 都收敛。

第 (i) 部分

Y 的概率总和必须为 1，所以 k 是 $\mathrm{P}(X \text{ 为偶数})$ 的倒数。由第一个结果，

$$\mathrm{P}(X \text{ 为偶数}) = \tfrac{1}{2}(1+\mathrm{e}^{-2\lambda}) = \mathrm{e}^{-\lambda}\cdot\tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{\lambda}+\mathrm{e}^{-\lambda}) = \mathrm{e}^{-\lambda}\cosh\lambda, \qquad \text{所以} \qquad k = \frac{\mathrm{e}^{\lambda}}{\cosh\lambda}.$$

Y 的母函数只保留 G 的偶数项：

$$\begin{aligned} G_Y(t) = k\sum_{r\text{ 为偶数}} p_r t^r &= k\cdot\tfrac{1}{2}(G(t)+G(-t)) \\ &= \frac{\mathrm{e}^{\lambda}}{\cosh\lambda}\cdot\mathrm{e}^{-\lambda}\cdot\tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{\lambda t}+\mathrm{e}^{-\lambda t}) = \frac{\cosh\lambda t}{\cosh\lambda}, \end{aligned}$$

其中 $\frac{1}{2}(G(t)+G(-t))$ 是 G 的偶部（even part），与第一个结果完全一样，只是以 t 代替 1。这正是所求的形式。

平均值为 $G_Y'(1)$：

$$\mathrm{E}(Y) = \frac{\lambda\sinh\lambda}{\cosh\lambda} = \lambda\tanh\lambda.$$

当 $\lambda > 0$ 时有 $\mathrm{e}^{-\lambda} > 0$，所以 $\sinh\lambda = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\lambda}-\mathrm{e}^{-\lambda}) < \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\lambda}+\mathrm{e}^{-\lambda}) = \cosh\lambda$，从而 $0 < \tanh\lambda < 1$。因此 $\mathrm{E}(Y) < \lambda$，得证。

第 (ii) 部分

现在我们只需保留 r 为 4 的倍数的项。

> ? **想一想** 当我们想按 4（而非 2）的倍数筛选时，甚么担当 $t = -1$ 的角色?

用全部四个四次单位根。对整数 r，

$$1+(-1)^r+\mathrm{i}^r+(-\mathrm{i})^r = \begin{cases} 4 & \text{若} 4 \mid r, \\ 0 & \text{其他情况.} \end{cases}$$

若 $4 \mid r$，每一项都是 1。若 r 为奇数，各项两两抵消：$(-1)^r = -1$ 且 $(-\mathrm{i})^r = -\mathrm{i}^r$。若 $r \equiv 2 \pmod 4$，各项为 $1+1-1-1=0$。所以

$$\sum_{4\mid r}\frac{x^r}{r!} = \tfrac{1}{4}(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}) = \tfrac{1}{2}(\cosh x+\cos x).$$

（也可以直接看出：$\cosh x = \sum_{r\text{ 为偶数}} x^r/r!$，而 $\cos x$ 的项相同，只是符号依次为 $+,-,+,\ldots$，所以两者相加时，$4 \mid r$ 的项加倍，其余的项抵消。）

取 $x = \lambda t$ 并乘以 $\mathrm{e}^{-\lambda}$，再以 $G_Z(1) = 1$ 这个要求定出 c，得

$$G_Z(t) = \frac{\cosh\lambda t+\cos\lambda t}{\cosh\lambda+\cos\lambda}.$$

当 $\lambda > 0$ 时分母为正，因为 $\cosh\lambda > 1 \geq -\cos\lambda$。求导后令 $t = 1$，

$$\mathrm{E}(Z) = G_Z'(1) = \frac{\lambda(\sinh\lambda - \sin\lambda)}{\cosh\lambda + \cos\lambda}.$$

由于 $\lambda > 0$ 且分母为正，

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Z) < \lambda &\iff \sinh\lambda - \sin\lambda < \cosh\lambda + \cos\lambda \\ &\iff \sin\lambda + \cos\lambda > \sinh\lambda - \cosh\lambda = -\mathrm{e}^{-\lambda} \\ &\iff \sin\lambda + \cos\lambda + \mathrm{e}^{-\lambda} > 0.\end{aligned}$$

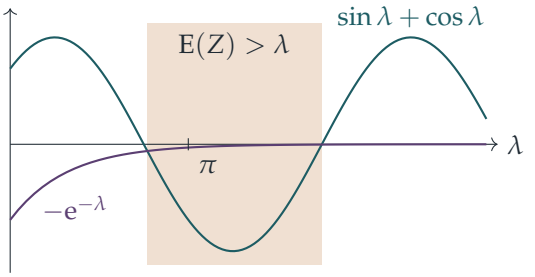
这在 $\lambda = \pi$ 时不成立：此时 $\sin\pi + \cos\pi + \mathrm{e}^{-\pi} = -1 + \mathrm{e}^{-\pi} < 0$，因为 $\mathrm{e}^{-\pi} < 1$。事实上

$$\mathrm{E}(Z)|_{\lambda=\pi} = \frac{\pi\sinh\pi}{\cosh\pi - 1} > \pi,$$

因为 $\sinh\pi > \cosh\pi - 1$（等价于 $1 > \mathrm{e}^{-\pi}$）。

所以答案是**否**：$\mathrm{E}(Z) < \lambda$ 并非对所有正数 λ 都成立。

若要看得更全面，可写 $\sin\lambda + \cos\lambda = \sqrt{2}\sin(\lambda + \frac{\pi}{4})$。每当这条曲线跌到 $-\mathrm{e}^{-\lambda}$ 以下，条件便不成立。第一个这样的区间大约由 $\lambda \approx 2.42$ 至 $\lambda \approx 5.49$，而随着 $\mathrm{e}^{-\lambda} \to 0$，之后的区间愈来愈接近 $(\frac{3\pi}{4} + 2n\pi,\ \frac{7\pi}{4} + 2n\pi)$。



验算

- 当 $\lambda \to 0$ 时，$\mathrm{E}(Y) = \lambda\tanh\lambda \approx \lambda^2$。这是合理的：$Y$ 几乎总是 0，而 $\mathrm{P}(Y = 2) \approx \lambda^2/2$。
- 当 $\lambda \to \infty$ 时，$\tanh\lambda \to 1$，所以 $\mathrm{E}(Y)$ 略小于 λ。当 λ 很大时，泊松分布很分散，所以舍弃奇数值几乎不会改变平均值。
- 电脑直接对泊松级数求和，核实了每个母函数和两个平均值。例如在 $\lambda = \pi$ 时，得到 $\mathrm{E}(Y) \approx 3.1299 < \pi$ 及 $\mathrm{E}(Z) \approx 3.4254 > \pi$。它亦找到 $\sin\lambda + \cos\lambda + \mathrm{e}^{-\lambda}$ 的变号点位于 $\lambda \approx 2.419$ 和 5.495。

常见错误

- 忘记归一化常数（normalising constant）：单独的 $\cosh \lambda t$ 并不是母函数，因为它在 $t = 1$ 的值不是 1。
- 以为 (ii) 的答案既然与 (i) 类似，就必定是“是”。只保留 4 的倍数，可能在 λ 以下移除的概率质量比以上的多，例如 $\lambda = \pi$ 时：最接近的容许值 4 在 π 之上，而且其概率远大于 0 的概率。
- 把不等式除以 $\cosh \lambda + \cos \lambda$ 时，没有先检查它是否为正。

STEP 之外

把母函数在单位根上取平均，以抽出某一同余类（residue class）中的项，这方法称为*单位根滤波*（roots-of-unity filter），又称级数的*多重分割*（multisection）。它是组合数学（combinatorics）的基本工具，也是离散傅里叶变换（discrete Fourier transform）最简单的情形。像本题这样，把分布以某事件为条件，再重新计算平均值，在概率论中随处可见。Grimmett 和 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率导论》）深入讲解了母函数。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。