详细解答

# STEP III 2018，第 11 题

力学 · 松弛绳与抛体

**STEP III 2018，第 11 题**

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

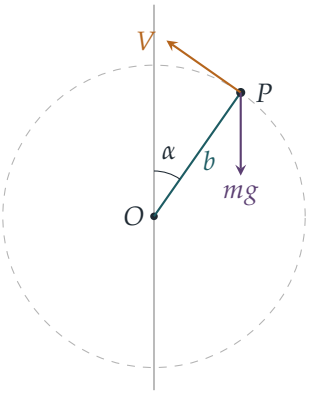
step.maths.org/questions/18-s3-q11

## 关键思路

当绳的张力（tension）降至零的一刻，绳便会变得松弛，所以该瞬间沿径向的运动方程便给出 $V$。此后质点只是一个普通的抛射体（projectile），而当质点与 $O$ 的距离回到 $b$ 时，绳便再次拉紧。若采用以 $O$ 为中心的坐标，这个条件会漂亮地化简，因为抛射体由圆上出发，并沿切线（tangent）方向运动。最后一部分则归结为：在急拉（jerk）的一刻，速度是否正好沿着绳的方向。

## 解答

我们把质点模拟为一个质量为 $m$ 的质点，系于一条轻而不可伸长（inextensible）的绳上，并忽略空气阻力。取 $O$ 为原点，$x$ 为水平方向，$y$ 为铅直向上，并假设质点沿逆时针方向摆动，使绳在向上铅直线右方的点 $P$ 变得松弛。




在 $P$ 点，绳与向上铅直线成角 $\alpha$，所以 $P = (b\sin\alpha,\ b\cos\alpha)$。该处的速度垂直于绳，方

向朝上并越过顶部：

$$\mathbf{v}_P = V(-\cos\alpha,\ \sin\alpha).$$

**绳变得松弛时的速率**

沿绳朝 $O$ 的方向分解。张力 $R$ 朝向 $O$；由于 $P$ 在 $O$ 之上，重力朝向 $O$ 的分量亦为 $mg\cos\alpha$。质点在半径为 $b$ 的圆上运动，所以

$$R + mg\cos\alpha = \frac{mV^2}{b}.$$

当 $R = 0$ 时绳变得松弛，所以

$$V^2 = gb\cos\alpha, \qquad V = \sqrt{gb\cos\alpha}.$$

**绳何时再次拉紧**

绳一旦松弛，质点便是一个抛射体。经过时间 $t$ 后，其位置为

$$x = b\sin\alpha - Vt\cos\alpha, \qquad y = b\cos\alpha + Vt\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

当 $x^2 + y^2 = b^2$ 时，绳再次拉紧。展开得

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= b^2\sin^2\alpha - 2bVt\sin\alpha\cos\alpha + V^2t^2\cos^2\alpha \\ &\quad + b^2\cos^2\alpha + V^2t^2\sin^2\alpha + \tfrac{1}{4}g^2t^4 + 2bVt\sin\alpha\cos\alpha - bgt^2\cos\alpha - gVt^3\sin\alpha \\ &= b^2 + \left(V^2 - gb\cos\alpha\right)t^2 - gVt^3\sin\alpha + \tfrac{1}{4}g^2t^4. \end{aligned}$$

含 $t$ 的项互相抵消，因为质点起初沿切线方向运动；含 $t^2$ 的项亦互相抵消，因为 $V^2 = gb\cos\alpha$。因此

$$x^2 + y^2 - b^2 = gt^3\left(\tfrac{1}{4}gt - V\sin\alpha\right).$$

当 $0 < t < 4V\sin\alpha/g$ 时，此式为负，所以质点严格位于圆内，绳保持松弛。此式在时间 $T$ 再次等于零（其后变为正），其中

$$gT = 4V\sin\alpha,$$

此即所求。

**拉紧前一刻的运动方向**

在时间 $T$，速度的分量为

$$\dot{x} = -V\cos\alpha, \qquad \dot{y} = V\sin\alpha - gT = V\sin\alpha - 4V\sin\alpha = -3V\sin\alpha.$$

所以质点正向左下方运动，而其路径与水平所成的角 $\beta$ 满足

$$\tan\beta = \frac{|\dot{y}|}{|\dot{x}|} = \frac{3V\sin\alpha}{V\cos\alpha} = 3\tan\alpha,$$

此即所求。

### 静止下来

**想一想** 速度要满足甚么条件，质点才会骤然停住?

急拉只会消去沿绳方向的动量（momentum）分量，垂直于绳的分量则不受影响。所以质点静止下来，当且仅当该垂直分量本身已经为零，即当且仅当拉紧前一刻的速度平行于绳 $\overrightarrow{OQ}$，其中 $Q$ 为质点在时间 $T$ 的位置。（速度并非零，因为 $\dot{x} = -V\cos\alpha \neq 0$。）

利用 $V^2 = gb\cos\alpha$ 及 $T = 4V\sin\alpha/g$，

$$\begin{aligned} x(T) &= b\sin\alpha - \frac{4V^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} = b\sin\alpha\,(1-4\cos^2\alpha), \\ y(T) &= b\cos\alpha + \frac{4V^2\sin^2\alpha}{g} - \frac{8V^2\sin^2\alpha}{g} = b\cos\alpha\,(1-4\sin^2\alpha). \end{aligned}$$

向量 $(x,y)$ 与 $(\dot{x},\dot{y})$ 平行，当且仅当 $x\dot{y} - y\dot{x} = 0$。除以 $-bV$，得

$$3\sin^2\alpha\,(1-4\cos^2\alpha) - \cos^2\alpha\,(1-4\sin^2\alpha) = 0.$$

设 $S = \sin^2\alpha$，则 $\cos^2\alpha = 1-S$ 及 $1-4\cos^2\alpha = 4S-3$:

$$\begin{aligned} 3S(4S-3) - (1-S)(1-4S) &= 0 \\ 12S^2 - 9S - (1-5S+4S^2) &= 0 \\ 8S^2 - 4S - 1 &= 0, \end{aligned}$$

所以 $S = \frac{1}{16}(4 \pm \sqrt{16+32}) = \frac{1}{4}(1\pm\sqrt{3})$。由于 $S = \sin^2\alpha > 0$，负根不可能成立，而余下的根位于 $(0,1)$ 之内，所以它对应一个真正的锐角。以上每一步都是可逆的，所以当绳拉紧时质点瞬间静止，当且仅当

$$\sin^2\alpha = \frac{1+\sqrt{3}}{4}.$$

## 验算

- 公式 $V^2 = gb\cos\alpha$ 表明当 $\alpha \to \frac{1}{2}\pi$ 时 $V \to 0$：绳要在 $O$ 的水平高度变得松弛，质点必须在该处已经停下，这是正确的。

- 当 $\sin^2\alpha = \frac{1}{4}(1+\sqrt{3})$ 时，得 $\alpha \approx 55.7°$ 及 $\cos^2\alpha = \frac{1}{4}(3-\sqrt{3})$，所以 $Q = \left(b\sin\alpha\,(\sqrt{3}-2),\ -\sqrt{3}\,b\cos\alpha\right)$，位于 $O$ 的左下方。$OQ$ 的斜率为 $\sqrt{3}\cot\alpha/(2-\sqrt{3})$，而路径的斜率为 $3\tan\alpha$。两者相符，因为

$$3(2-\sqrt{3})\tan^2\alpha = \frac{3(2-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}{3-\sqrt{3}} = \frac{3(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)} = \sqrt{3}.$$

  以电脑模拟这个运动，三个结果均得到证实。

## 常见错误

- 只用能量来求 $V$：能量把 $V$ 与初速联系起来，但以 $b$、$g$ 及 $\alpha$ 确定 $V$ 的，是张力为零的条件。
- 弄错 $P$ 点的速度方向。速度垂直于 $OP$，所以它与水平（而非铅直）成角 $\alpha$。
- 忘记证明 $T$ 是绳首次拉紧的时间；因式分解（factorisation）$gt^3(\frac{1}{4}gt - V\sin\alpha)$ 正好说明了这一点。

## STEP 之外

绳只能拉、不能推，所以松弛绳问题实际上是一个约束时有时无的受约束系统（constrained system）；同样的单侧约束（one-sided constraint）概念，亦出现于接触力学（contact mechanics），以及带不等式约束的拉格朗日力学（Lagrangian mechanics）之中。骤然的急拉是一种冲击性约束力（impulsive constraint force），在大学一年级课程中会与碰撞及恢复系数（coefficient of restitution）一并讨论。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）对圆周运动和冲量都有细致的阐述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。