详细解答

STEP III 2018，第 10 题

力学 · 复摆

> **STEP III 2018，第 10 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/18-s3-q10

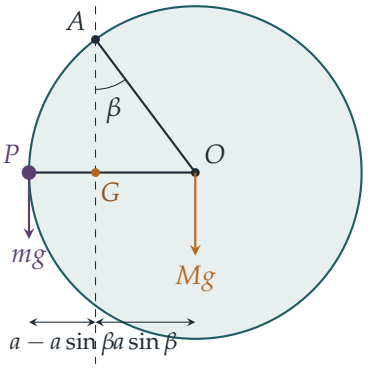
关键思路

圆盘与质点合起来构成单一个刚体（rigid body），绕固定轴 L 转动，因此一切都由一个角度决定。在平衡时，整体的质心（centre of mass）必须位于 A 的正下方，这就是关于 A 的力矩（moment）平衡。至于运动，由于轴是光滑（smooth）的，该处的反作用力不做功，所以能量守恒（conservation of energy）。只要把能量写成 θ 和 $\dot{\theta}$ 的函数，对它求导便得到运动方程（equation of motion），再把 $\sin\theta$ 换成 θ，便得出小幅振动（small oscillations）的结果。

解答

我们把圆盘模型化为均匀的刚性薄片（lamina），把质点视为固定在圆盘边缘上的点质量（point mass），并假设轴 L 是光滑的。

平衡。 关于 A 有力矩的力只有两个重力：作用于 O 的 Mg 和作用于 P 的 mg。A 处的反作用力通过 A。由于 AO 与向下的铅垂线成角 β，O 位于 A 某一侧、水平距离为 $a\sin\beta$ 之处，不妨设在右侧。这样重力 Mg 会令圆盘绕 A 顺时针转动，而只有 mg 能与之平衡，所以 P 必须在通过 A 的铅垂线的*左*侧。因为 OP 是水平的，长度为 a，所以 P 在 A 左方的水平距离为 $a - a\sin\beta$。（这里 $a\sin\beta < a$，所以 P 确实在铅垂线的左侧。）



关于 A 取力矩，

$$Mg\,a\sin\beta = mg\,(a - a\sin\beta) \quad\Longrightarrow\quad \sin\beta = \frac{m}{M+m}.$$

O 和 P 都位于 A 下方、铅垂距离为 $a\cos\beta$ 之处。所以在以 AP 为斜边（hypotenuse）的直角三角形中，水平边为 $a(1-\sin\beta)$，铅垂边为 $a\cos\beta$：

$$\begin{aligned} AP^2 &= a^2(1-\sin\beta)^2 + a^2\cos^2\beta = a^2\big(2-2\sin\beta\big) \\ &= 2a^2\Big(1-\frac{m}{M+m}\Big) = \frac{2Ma^2}{M+m}, \end{aligned}$$

因此 $AP/a = \sqrt{2M/(M+m)}$，正如所求。

值得留意整体质心 G 的位置。它是 O 和 P 的加权平均（weighted average），所以位于线段 OP 上，即在 A 下方深度 $a\cos\beta$ 处。在平衡时它位于 A 的正下方，所以

$$AG = a\cos\beta.$$

能量守恒。 圆盘与质点作为一个刚体一起运动。在平衡时 OP 是水平的，而 OP 随刚体一起转动，所以当 OP 与水平线成角 θ 时，整个刚体已从平衡位置转过了 θ。因此它的角速率（angular speed）为 $|\dot\theta|$。

> ? **想一想** 质点的速率是多少?

刚体上每一点都沿以轴为圆心的圆周运动。质点与 A 的距离恒为 AP，所以它的速率是 $AP\,|\dot\theta|$，动能（kinetic energy）为

$$\tfrac{1}{2}m\,AP^2\,\dot\theta^2 = \tfrac{1}{2}m\cdot 2a^2(1-\sin\beta)\,\dot\theta^2 = (1-\sin\beta)\,ma^2\dot\theta^2,$$

这里用了上面得到的 $AP^2 = 2a^2(1-\sin\beta)$。圆盘的动能是 $\frac{1}{2}I\dot\theta^2$。

至于势能（potential energy），可把总质量 $M+m$ 视为集中在 G。直线 AG 在平衡时是铅垂的，它同样转过了 θ，所以 G 现在位于 A 下方深度 $a\cos\beta\cos\theta$ 处。以平衡位置为势

能零点，

$$\text{势能} = (M+m)g\big(a\cos\beta - a\cos\beta\cos\theta\big) = (M+m)ga\cos\beta\,(1-\cos\theta).$$

轴是光滑的，而 A 处的反作用力作用在一个不动的点上，所以它不做功。唯一其他的力是重力，而重力是保守力（conservative force）。所以动能加势能是常数：

$$\tfrac{1}{2}I\dot\theta^2 + (1-\sin\beta)\,ma^2\dot\theta^2 + (m+M)ga\cos\beta\,(1-\cos\theta) = \text{常数},$$

这正是所求的结果。

小幅振动。 对 t 求导：

$$\dot\theta\Big[\big(I + 2(1-\sin\beta)ma^2\big)\ddot\theta + (M+m)ga\cos\beta\,\sin\theta\Big] = 0.$$

只要 $\dot\theta \neq 0$，方括号内的式子就必须为零；由连续性，它在每一时刻都为零。当 θ 很小时，$\sin\theta \approx \theta$，所以

$$\ddot\theta = -\omega^2\theta, \qquad \omega^2 = \frac{(M+m)ga\cos\beta}{I + 2(1-\sin\beta)ma^2},$$

这是周期（period）为 $2\pi/\omega$ 的简谐运动（simple harmonic motion）。

现在设 $m = \frac{3}{2}M$。那么 $\sin\beta = \dfrac{3/2}{5/2} = \frac{3}{5}$，又因为 β 是锐角，$\cos\beta = \frac{4}{5}$。分子为

$$\tfrac{5}{2}M\cdot ga\cdot\tfrac{4}{5} = 2Mga,$$

而以 $I = \frac{3}{2}Ma^2$ 代入，分母为

$$\tfrac{3}{2}Ma^2 + 2\cdot\tfrac{2}{5}\cdot\tfrac{3}{2}Ma^2 = \tfrac{3}{2}Ma^2 + \tfrac{6}{5}Ma^2 = \tfrac{27}{10}Ma^2.$$

所以 $\omega^2 = \dfrac{20g}{27a}$，周期为

$$\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{27a}{20g}} = 2\pi\cdot\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3a}{5g}} = 3\pi\sqrt{\frac{3a}{5g}},$$

这里用了 $\sqrt{27/20} = \sqrt{9\cdot 3/(4\cdot 5)} = \frac{3}{2}\sqrt{3/5}$。这就是所求的周期。

验算

- 取 $m = 0$，得 $\sin\beta = 0$ 及 $AP/a = \sqrt{2}$。此时圆盘悬挂时 O 在 A 的正下方，而与 O 同高的边缘点与 A 的距离确实是 $\sqrt{2}\,a$。周期变为 $2\pi\sqrt{(3a/2)/g}$，正是以边缘上一点为支点的圆盘的熟悉结果。

- 动能各项相加得 $\frac{1}{2}(I + m\,AP^2)\dot{\theta}^2$，其中括号内是整个刚体关于 L 的转动惯量（moment of inertia），理应如此。
- 以 $m = \frac{3}{2}M$ 及 $a = 0.5\,\mathrm{m}$ 对该刚体进行逐步的电脑模拟，得到小幅振动周期为 $1.64815\,\mathrm{s}$。公式给出 $3\pi\sqrt{1.5/49.05} \approx 1.64815\,\mathrm{s}$。模拟亦显示，即使摆幅很大，能量表达式仍保持不变。

常见错误

- 把 P 放在铅垂线上与 O 同一侧。这样两个重力会令刚体向同一方向转动，不可能平衡。
- 用 a 而不是 AP 作为质点与轴的距离。质点是绕 A 而不是绕 O 作圆周运动。
- 分别计算 O 和 P 的势能，结果在三角运算中迷失方向。改用与 A 相距 $a\cos\beta$ 的整体质心 G，计算会简洁得多。

STEP 之外

这是一个*复摆*（compound pendulum）：任何绕固定轴摆动的刚体，其振动都如同一个长度为 $I_{\text{总}}/\big((M+m)h\big)$ 的单摆，其中 h 是轴到质心的距离。我们的能量方法是拉格朗日力学（Lagrangian mechanics）的单变量情况：在拉格朗日力学中，运动方程由以单一广义坐标（generalised coordinate）表示的动能和势能得出。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）对刚体转动和物理摆有细致的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。