详细解答

# STEP III 2018，第 1 题

纯数学 · 二次方程的根与不等式

**STEP III 2018，第 1 题**

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/18-s3-q1

## 关键思路

韦达定理（Vieta's formulas）把 $u$ 和 $v$ 的两个对称（symmetric）表达式都化为系数 $\alpha$ 和 $\beta$ 的简单函数。一旦固定其中一个表达式，就可以消去 $\alpha$，另一个表达式便成为只含 $\beta$ 的函数，而且正好是第 (i) 部分所描绘的两个函数之一。$u$ 和 $v$ 为实数的条件（判别式（discriminant）$\geq 0$）则告诉我们可以使用曲线的哪一段，其余的就交给草图。

## 解答

### 第 (i) 部分

**曲线** $y = \mathrm{f}(\beta)$。 求导，得

$$\mathrm{f}'(\beta) = 1 + \frac{1}{\beta^2} + \frac{2}{\beta^3} = \frac{\beta^3 + \beta + 2}{\beta^3} = \frac{(\beta+1)(\beta^2 - \beta + 2)}{\beta^3},$$

其中我们看出了三次式的根 $\beta = -1$。二次因式的判别式为 $1 - 8 < 0$，所以它恒为正。因此唯一的驻点（stationary point）位于 $\beta = -1$，此时

$$\mathrm{f}(-1) = -1 + 1 - 1 = -1.$$

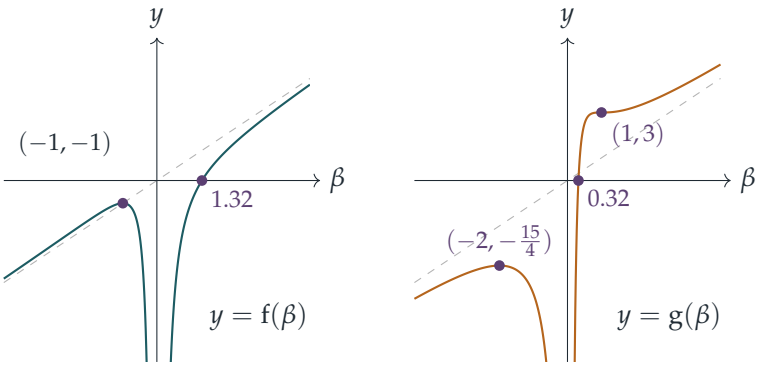
正负号：当 $-1 < \beta < 0$ 时，分子为正而 $\beta^3 < 0$，所以 $\mathrm{f}' < 0$；当 $\beta < -1$ 时两者皆为负，所以 $\mathrm{f}' > 0$。因此 $(-1, -1)$ 是极大值（maximum）点，而且对每个 $\beta < 0$ 都有 $\mathrm{f}(\beta) \leq -1$。当 $\beta > 0$ 时各项皆为正，所以 f 在该处递增（increasing）。

边界的行为：当 $\beta \to 0$（从任一方向）时，$-1/\beta^2$ 一项起主导作用，所以 $\mathrm{f} \to -\infty$。当 $\beta \to \pm\infty$ 时，$\mathrm{f}(\beta) - \beta \to 0$，因此 $y = \beta$ 是斜渐近线（oblique asymptote）。曲线与轴相交一次，交点满足 $\beta^3 - \beta - 1 = 0$，位于 $\beta \approx 1.32$。

**曲线** $y = \mathrm{g}(\beta)$。同样地，

$$\mathrm{g}'(\beta) = 1 - \frac{3}{\beta^2} + \frac{2}{\beta^3} = \frac{\beta^3 - 3\beta + 2}{\beta^3} = \frac{(\beta-1)^2(\beta+2)}{\beta^3}.$$

驻点位于 $\beta = -2$，此时 $\mathrm{g}(-2) = -2 - \frac{3}{2} - \frac{1}{4} = -\frac{15}{4}$；以及位于 $\beta = 1$，此时 $\mathrm{g}(1) = 3$。当 $-2 < \beta < 0$ 时 $\mathrm{g}' < 0$，当 $\beta < -2$ 时 $\mathrm{g}' > 0$，所以 $(-2, -\frac{15}{4})$ 是极大值点，而且对所有 $\beta < 0$ 都有 $\mathrm{g}(\beta) \le -\frac{15}{4}$。当 $\beta > 0$ 时，$\mathrm{g}' \ge 0$，且只在 $\beta = 1$ 时取等号：导数在该处不变号，所以 $(1,3)$ 是驻拐点（stationary point of inflection），而 g 在 $\beta > 0$ 上递增。同样地，当 $\beta \to 0$ 时 $\mathrm{g} \to -\infty$，$y = \beta$ 是渐近线，而且只有一个零点，位于 $\beta \approx 0.32$（即 $\beta^3 + 3\beta - 1 = 0$ 的根）。




虚线是渐近线 $y = \beta$。

### 第 (ii) 部分

由韦达定理，$u + v = -\alpha$ 及 $uv = \beta$（而由于 $\beta \ne 0$，故 $uv \ne 0$）。所以

$$u + v + \frac{1}{uv} = -\alpha + \frac{1}{\beta}, \qquad \frac{1}{u} + \frac{1}{v} + uv = \frac{u+v}{uv} + uv = \beta - \frac{\alpha}{\beta}.$$

### 第 (iii) 部分

条件 $-\alpha + \frac{1}{\beta} = -1$ 给出 $\alpha = 1 + \frac{1}{\beta}$。代入第二个表达式，

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + uv = \beta - \frac{1}{\beta}\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) = \beta - \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta^2} = \mathrm{f}(\beta).$$

因此我们须证明对每个容许的 $\beta$ 都有 $\mathrm{f}(\beta) \le -1$。

**想一想** 曲线 $y = \mathrm{f}(\beta)$ 趋向 $+\infty$，所以这个不等式不可能对所有 $\beta$ 成立。是甚么阻止 $\beta$ 变得很大?

是 $u$ 和 $v$ 必须为实数。两根为实数当且仅当 $\alpha^2 \geq 4\beta$，即

$$\left(1+\frac{1}{\beta}\right)^2 \geq 4\beta \iff (\beta+1)^2 \geq 4\beta^3 \iff 4\beta^3-\beta^2-2\beta-1 \leq 0,$$

其中我们乘以了 $\beta^2 > 0$。现在 $\beta = 1$ 是这个三次式的根，而且

$$4\beta^3-\beta^2-2\beta-1 = (\beta-1)(4\beta^2+3\beta+1).$$

二次因式的判别式为 $9-16 < 0$，所以它恒为正。因此两根为实数当且仅当 $\beta \leq 1$（且 $\beta \neq 0$）。

- 若 $\beta < 0$：由第 (i) 部分，$f(\beta) \leq f(-1) = -1$。
- 若 $0 < \beta \leq 1$：f 在 $\beta > 0$ 上递增，所以 $f(\beta) \leq f(1) = 1-1-1 = -1$。

在所有情况下都有 $\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+uv \leq -1$，命题得证。等号在 $\beta = -1$（$\alpha = 0$，两根为 $\pm 1$）及 $\beta = 1$（$\alpha = 2$，重根（double root）$-1$）时成立。

**第 (iv) 部分**

现在 $-\alpha+\frac{1}{\beta} = 3$，所以 $\alpha = \frac{1}{\beta}-3$，而且

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+uv = \beta-\frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{\beta}-3\right) = \beta+\frac{3}{\beta}-\frac{1}{\beta^2} = g(\beta).$$

当 $\alpha^2 \geq 4\beta$ 时两根为实数：

$$\left(\frac{1}{\beta}-3\right)^2 \geq 4\beta \iff (1-3\beta)^2 \geq 4\beta^3 \iff 4\beta^3-9\beta^2+6\beta-1 \leq 0.$$

同样，$\beta = 1$ 是一个根，而这次它是重根：

$$4\beta^3-9\beta^2+6\beta-1 = (\beta-1)(4\beta^2-5\beta+1) = (\beta-1)^2(4\beta-1).$$

由于 $(\beta-1)^2 \geq 0$，这个三次式 $\leq 0$ 当且仅当 $\beta \leq \frac{1}{4}$ 或 $\beta = 1$。因此容许的值为 $\beta < 0$、$0 < \beta \leq \frac{1}{4}$，以及孤立的值 $\beta = 1$。

**想一想** 最大值是否就是区间右端的 $g(\frac{1}{4})$?

并不完全是：别遗漏那个孤立点。在三个部分上分别考虑：

- $\beta < 0$：由第 (i) 部分，$g(\beta) \leq -\frac{15}{4}$。
- $0 < \beta \leq \frac{1}{4}$：g 递增，所以 $g(\beta) \leq g(\frac{1}{4}) = \frac{1}{4}+12-16 = -\frac{15}{4}$。
- $\beta = 1$：$g(1) = 3$。

所以 $\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+uv$ 的最大值是 $\boxed{3}$，在 $\beta = 1$、$\alpha = -2$，即 $u = v = 1$ 时取得。（事实上两个表达式都等于 $1+1+1 = 3$。）若没有那个重根，就不可能得到任何大于 $-\frac{15}{4}$ 的值。

## 验算

- 把 $u = v = 1$ 代入两个表达式：两者皆为 3，与第 (iv) 部分吻合。代入 $u = v = -1$：两者皆为 $-1$，即第 (iii) 部分取等号的情况。
- 在第 (iv) 部分试 $\beta = \frac{1}{4}$：$\alpha = 1$，而 $x^2 + x + \frac{1}{4} = (x + \frac{1}{2})^2$，所以 $u = v = -\frac{1}{2}$。于是 $u + v + \frac{1}{uv} = -1 + 4 = 3$ 及 $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + uv = -4 + \frac{1}{4} = -\frac{15}{4}$，与所述相符。
- 用电脑在数千个给出实根的随机 $\beta$ 中搜索，在第 (iii) 部分找不到任何大于 $-1$ 的值，而在第 (iv) 部分除 $\beta = 1$ 外也找不到任何大于 $-3.75$ 的值。

## 常见错误

- 忘记判别式条件，因而在第 (iii) 部分得出没有上界的结论。
- 把 $(\beta - 1)^2(4\beta - 1) \leq 0$ 解成只有 $\beta \leq \frac{1}{4}$，遗漏了 $\beta = 1$，结果答案变成 $-\frac{15}{4}$ 而非 3。
- 把不等式 $\alpha^2 \geq 4\beta$ 乘以 $\beta$（它可能是负数），而不是乘以 $\beta^2$。

## STEP 之外

这是一个小型的约束最优化（constrained optimisation）问题：我们在给出实根的系数集合上求函数的最大值，而这个集合除了区间之外，还可以包含孤立点。函数在一个集合上的最大值不一定出现在驻点或区间端点，这正是为何在分析和最优化中，仔细描述可行集（feasible set）如此重要。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）对连续函数在一般集合上的极值有严谨的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。