详细解答

STEP II 2018，第 9 题

力学 • 重力作用下的碰撞

> **STEP II 2018，第 9 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/18-s2-q9

关键思路

两粒珠子（bead）的加速度始终相同，都是向下的 g，所以两者之间的相对运动是等速的。A 反弹之后，两珠之间的距离以恒定速率缩小，由此即可求出碰撞所需的时间。最后一部分则纯粹是能量与动量的计算：知道 A 撞到地面时的速率，就知道它离开碰撞时的速率，其余交给牛顿实验定律（Newton's experimental law）便可。

解答

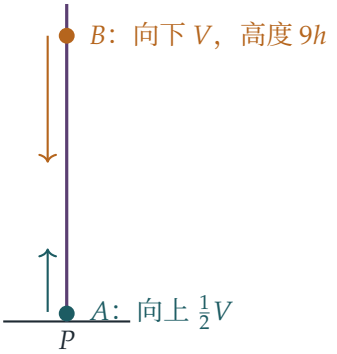
我们把两粒珠子视为质量同为 m 的质点（particle），套在一条光滑（smooth）的竖直金属线上，并忽略空气阻力，因此在两次撞击之间，每粒珠子都只受重力作用而自由运动。取向上为正方向，高度由 P 起量度。

直至第一次反弹

A 由静止下落 $8h$，故由能量守恒（conservation of energy）得

$$V^2 = 2g(8h) = 16gh, \qquad V = 4\sqrt{gh}.$$

在同一段时间内，B 亦由静止下落了 $8h$（运动完全相同），所以此刻 B 位于高度 $17h - 8h = 9h$，以速率 V 向下运动。A 从地面以速率 $\frac{1}{2}V$ 向上反弹。



碰撞

从 A 离开地面的一刻起，两粒珠子的加速度都是 $-g$，因此 B 相对于 A 的速度一直保持其初始值

$$(-V)-\tfrac{1}{2}V=-\tfrac{3}{2}V.$$

想一想 为甚么计算两珠何时相遇时可以不理会重力?

重力令两者的速度改变相同的量 $-gt$，所以在两者之差中互相抵消。于是 $9h$ 的距离以恒定速率 $\frac{3}{2}V$ 缩小，碰撞发生在反弹后

$$\tau=\frac{9h}{\frac{3}{2}V}=\frac{6h}{V}=\frac{6h}{4\sqrt{gh}}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{h}{g}}$$

的时刻。（我们还需要 A 在那时仍在空中；稍后会看到确实如此。）此时 A 的高度为

$$H=\tfrac{1}{2}V\tau-\tfrac{1}{2}g\tau^2=2\sqrt{gh}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{\frac{h}{g}}-\frac{1}{2}g\cdot\frac{9h}{4g}=3h-\frac{9}{8}h=\frac{15}{8}h,$$

正如所求。碰撞前一瞬间，

$$\text{速度：}\ A=\tfrac{1}{2}V-g\tau=2\sqrt{gh}-\tfrac{3}{2}\sqrt{gh}=\tfrac{1}{2}\sqrt{gh},$$
$$\text{速度：}\ B=-V-g\tau=-4\sqrt{gh}-\tfrac{3}{2}\sqrt{gh}=-\tfrac{11}{2}\sqrt{gh}.$$

所以 A 仍在上升，而且

$$u_A=\tfrac{1}{2}\sqrt{gh}\,(\text{向上}),\qquad u_B=\tfrac{11}{2}\sqrt{gh}\,(\text{向下}).$$

验算一下：B 的高度为 $9h-V\tau-\frac{1}{2}g\tau^2=9h-6h-\frac{9}{8}h=\frac{15}{8}h$，同样吻合。

恢复系数

设 e 为两珠之间的恢复系数（coefficient of restitution），并设 v_A、v_B 为两者在碰撞后一瞬间的速度（向上为正）。暂且以 $\sqrt{gh}$ 为单位，于是 $u_A=\frac{1}{2}$ 向上，$u_B=\frac{11}{2}$ 向下。

动量（momentum）（两者质量相等，而在瞬间发生的碰撞中，重力的冲量（impulse）可以忽略）：

$$v_A + v_B = \tfrac{1}{2} - \tfrac{11}{2} = -5.$$

牛顿实验定律：两珠以速率 $\frac{1}{2} + \frac{11}{2} = 6$ 互相接近，碰撞后位于上方的 B 以此速率的 e 倍与 A 分离：

$$v_B - v_A = 6e.$$

两式相减，得 $v_A = -\frac{1}{2}(5+6e)$，所以 A 以速率 $w = \frac{1}{2}(5+6e)\sqrt{gh}$ 向下运动。

现在 A 从高度 $\frac{15}{8}h$ 以初速率 w 下落，并以速率 V 到达地面（它在 B 下方，且向下运动得较快，因为 $v_B = -5 - v_A = \frac{1}{2}(6e-5) > v_A$，所以两珠不会在此之前再次相遇）。由能量守恒，

$$V^2 = w^2 + 2g \cdot \tfrac{15}{8}h \quad \Longrightarrow \quad w^2 = 16gh - \tfrac{15}{4}gh = \tfrac{49}{4}gh,$$

故 $w = \frac{7}{2}\sqrt{gh}$。于是 $\frac{1}{2}(5+6e) = \frac{7}{2}$，得

$$e = \frac{1}{3}.$$

碰撞后，A 以 $\frac{7}{2}\sqrt{gh}$ 向下运动，B 以 $\frac{3}{2}\sqrt{gh}$ 向下运动。

验算

- 动能（kinetic energy）：碰撞前总动能为 $\frac{1}{2}m\,gh\,(\frac{1}{4} + \frac{121}{4}) = \frac{61}{4}mgh$；碰撞后为 $\frac{1}{2}m\,gh\,(\frac{49}{4} + \frac{9}{4}) = \frac{29}{4}mgh$。能量有所损失，这正是 $e < 1$ 时应有的情况。
- 若 $e = 1$（且质量相等），两珠会直接交换速度，于是 A 会以 $\frac{11}{2}\sqrt{gh}$ 离开，著地时速率大于 V；若 $e = 0$，两珠会以 $\frac{5}{2}\sqrt{gh}$ 一同运动，A 著地时速率会较小。$\frac{1}{3}$ 这个数值合理地介乎两者之间。
- 以电脑逐步模拟整个运动（取 $g = h = 1$），得出碰撞发生在高度 1.875，两者速率分别为 0.5 和 5.5；并且在 $e = \frac{1}{3}$ 时，第二次著地的速率为 $4 = V$。

常见错误

- 忘记在 A 下落期间 B 也一直在下落：反弹时 B 位于 $9h$，而不是 $17h$，而且已经以速率 V 运动。
- 牛顿定律中的正负号错误：所有速度都应以同一个正方向表示，并检查得出的分离速率是否为正。

STEP 之外

在其中一粒下落珠子的参考系（frame）中考虑问题，这个技巧让我们初尝伽利略相对性（Galilean relativity）的滋味：在均匀重力场中，自由下落的参考系完全感受不到重力，而这正是爱因斯坦（Einstein）等效原理（equivalence principle）的出发点。大学一年级力学中的碰撞问题，通常在质心参考系（centre-of-mass frame）中求解；在这个参考系中，恢复系数为 e 的撞击只不过是把两个速度反向，并乘以 e。Kleppner 与 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）对这两个概念都有细致的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。