详细解答

STEP II 2018，第 8 题

纯数学 · 伯努利微分方程

> **STEP II 2018，第 8 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/18-s2-q8

关键思路

两条方程都是伯努利方程（Bernoulli equation）：右方出现 y 的幂，破坏了线性（linearity），但只要选取 y 的适当幂作为新变量，方程便会变成线性。设 $y = v^2$（或 $y = v^3$），公因子 v（或 v^2）可以约去，余下的是一条常系数一阶线性方程（first-order linear equation），可用积分因子（integrating factor）或分离变量（separating variables）求解。至于作图，比较两条曲线最简洁的方法，是把两者都以同一个指数 $u = e^{-t/6}$ 表示。

解答

题目写的是 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$，但自变量（independent variable）自始至终都是 t，所以我们写成 $y_1(t)$ 和 $y_2(t)$。

第 (i) 部分

设 $y = v^2$，其中 $v = \sqrt{y} \geq 0$。于是 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ 及 $y^{1/2} = v$，方程变为

$$2v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \alpha v - \beta v^2.$$

其中一个解是 $v \equiv 0$，即常数解（constant solution）$y \equiv 0$。在 $v \neq 0$ 之处，我们可以除以 v：

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{\beta}{2}v = \frac{\alpha}{2}.$$

这是线性方程，积分因子为 $e^{\beta t/2}$：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(ve^{\beta t/2}\right) = \frac{\alpha}{2}e^{\beta t/2} \quad \Longrightarrow \quad ve^{\beta t/2} = \frac{\alpha}{\beta}e^{\beta t/2} + C.$$

因此通解（general solution）为

$$\sqrt{y} = \frac{\alpha}{\beta} + Ce^{-\beta t/2}, \qquad \text{即} \qquad y = \left(\frac{\alpha}{\beta} + Ce^{-\beta t/2}\right)^2,$$

其中 C 为常数（只取括号内非负的范围，因为 $v = \sqrt{y} \geq 0$），另外还有常数解 $y \equiv 0$。取 $C = 0$ 则得到另一个常数解 $y \equiv \alpha^2/\beta^2$。

要 $y_1(0) = 0$，便需要 $v(0) = 0$，故 $C = -\alpha/\beta$，而

$$\boxed{y_1(t) = \frac{\alpha^2}{\beta^2}\left(1 - e^{-\beta t/2}\right)^2}$$

这个解不是常数，而且当 $t \geq 0$ 时括号 $1 - e^{-\beta t/2}$ 非负，所以它确实是一个解。（在 $t > 0$ 时 $v > 0$，所以除以 v 是合理的。）

第 (ii) 部分

现在幂是 $\frac{2}{3}$，所以我们希望 $y^{2/3}$ 与 y 有公因子。设 $y = v^3$，即 $v = y^{1/3} \geq 0$。于是 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 3v^2\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ 及 $y^{2/3} = v^2$，得

$$3v^2\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \alpha v^2 - \beta v^3.$$

想一想 你会怎样想到代换 $v = y^{1/3}$?

在第 (i) 部分，$v = y^{1-\frac{1}{2}}$ 令两边都有公因子 v。对伯努利方程 $\dot{y} = \alpha y^n - \beta y$ 而言，代换 $v = y^{1-n}$ 总是奏效，而这里 $1 - n = \frac{1}{3}$。

除了 $v \equiv 0$（即常数解 $y \equiv 0$）之外，除以 v^2：

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{\beta}{3}v = \frac{\alpha}{3}.$$

以积分因子 $e^{\beta t/3}$，与之前完全一样，得

$$y^{1/3} = \frac{\alpha}{\beta} + De^{-\beta t/3}, \qquad \text{即} \qquad y = \left(\frac{\alpha}{\beta} + De^{-\beta t/3}\right)^3,$$

其中 D 为常数（括号内非负）。条件 $y_2(0) = 0$ 迫使 $D = -\alpha/\beta$，故

$$\boxed{y_2(t) = \frac{\alpha^3}{\beta^3}\left(1 - e^{-\beta t/3}\right)^3}$$

第 (iii) 部分

当 $\alpha = \beta$ 时，

$$y_1(t) = \left(1 - e^{-t/2}\right)^2, \qquad y_2(t) = \left(1 - e^{-t/3}\right)^3.$$

每条曲线的形状。两条曲线都从 0 开始并且递增，因为 $1-e^{-t/2}$ 和 $1-e^{-t/3}$ 都由 0 增加并趋向 1。当 $t\to\infty$ 时两者都趋向 1，即 (i) 的常数解 $y=\alpha^2/\beta^2=1$ 与 (ii) 的常数解 $y=\alpha^3/\beta^3=1$。求导得

$$y_1'=e^{-t/2}\left(1-e^{-t/2}\right),\qquad y_2'=e^{-t/3}\left(1-e^{-t/3}\right)^2,$$

所以两者在原点的斜率都是零。斜率 $y_1'=w(1-w)$（其中 $w=e^{-t/2}$）在 $w=\frac12$ 时最大，所以 y_1 在 $t=2\ln 2$、$y_1=\frac14$ 处有拐点（point of inflection）。同样，$y_2'=w(1-w)^2$（其中 $w=e^{-t/3}$）在 $w=\frac13$ 时最大，得拐点在 $t=3\ln 3$、$y_2=\frac{8}{27}$。每条曲线都呈 S 形，由原点上升至渐近线（asymptote）$y=1$。

相对位置。设 $u=e^{-t/6}$，则当 $t>0$ 时 $0<u<1$，且 $e^{-t/2}=u^3$、$e^{-t/3}=u^2$。于是

$$y_1=(1-u^3)^2=(1-u)^2(1+u+u^2)^2,\qquad y_2=(1-u^2)^3=(1-u)^3(1+u)^3,$$

因此

$$\frac{y_1}{y_2}=\frac{(1+u+u^2)^2}{(1-u)(1+u)^3}.$$

展开得 $(1+u+u^2)^2=1+2u+3u^2+2u^3+u^4$ 及 $(1-u)(1+u)^3=(1-u^2)(1+u)^2=1+2u-2u^3-u^4$。分子减分母为

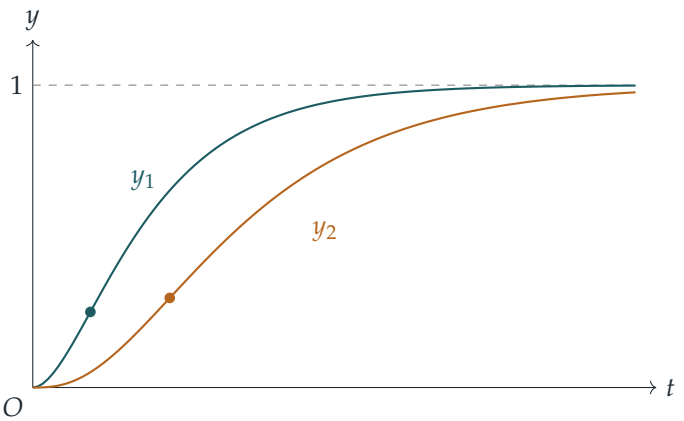
$$3u^2+4u^3+2u^4>0\qquad(0<u<1),$$

而分母为正，所以 $y_1/y_2>1$。因此

$$y_1(t)>y_2(t)\quad\text{对所有}t>0:$$

两条曲线只在原点相交，而在其他地方 y_1 都位于 y_2 之上。

这与两端的表现吻合。在 $t=0$ 附近，$y_1\approx\frac{t^2}{4}$，而 $y_2\approx\frac{t^3}{27}$，后者小得多。当 t 很大时，$1-y_1\approx 2e^{-t/2}$ 而 $1-y_2\approx 3e^{-t/3}$，且 $e^{-t/3}$ 衰减得较慢，所以 y_2 离渐近线较远。



图中的点标示拐点：y_1 上的 $(2\ln 2,\frac14)$ 及 y_2 上的 $(3\ln 3,\frac{8}{27})$。

验算

- 代回原方程：对 y_1，取 $\alpha = \beta = 1$，则 $y_1^{1/2} - y_1 = (1-w) - (1-w)^2 = w(1-w)$，其中 $w = e^{-t/2}$，这正是 y_1'。
- t 很大时：$y_1 \to \alpha^2/\beta^2$，即 $\alpha y^{1/2} = \beta y$ 的非零解；同样 $y_2 \to \alpha^3/\beta^3$，即 $\alpha y^{2/3} = \beta y$ 之处。
- 取 $\alpha = \beta = 1$ 的数值：在 $t = 2$ 时，$y_1 \approx 0.400$、$y_2 \approx 0.115$；在 $t = 10$ 时，$y_1 \approx 0.987$、$y_2 \approx 0.897$。两条公式亦已用电脑对微分方程作逐步数值积分加以验证。

常见错误

- 除以 v（或 v^2）时没有指出 $y \equiv 0$ 也是一个解。正因如此，题目才要求通过原点的非常数解。
- 弄错指数：代换 $y = v^3$ 得出的是 $e^{-\beta t/3}$，而不是 $e^{-\beta t/2}$。
- 单凭斜率判断两条曲线的高低。在两条曲线高度相同、$y \in (0,1)$ 之处，$y^{2/3} > y^{1/2}$，所以 y_2 在那里会上升得较快；但这并不能说明哪条曲线较高，因此需要直接比较。

STEP 之外

这些是伯努利方程，属大学一年级的标准方程类型，以 $v = y^{1-n}$ 求解。它们亦展示了解的非唯一性（non-uniqueness）：由于 $y^{1/2}$ 和 $y^{2/3}$ 在 $y = 0$ 处斜率无限大，右方在该处不满足利普希茨条件（Lipschitz condition），于是 $y \equiv 0$ 与 y_1 都通过原点。事实上，先停留在 0 直至任意时刻 t_0，然后沿着 $y_1(t - t_0)$ 走，便得到一整族解。皮卡–林德勒夫定理（Picard–Lindelöf theorem）准确说明了何时不会出现这种情况。Boyce 与 DiPrima 合著的 *Elementary Differential Equations*（《基础微分方程》）同时涵盖伯努利方程及解的存在性与唯一性。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。