详细解答

STEP II 2018，第 7 题

纯数学 · 几何中的向量

STEP II 2018，第 7 题

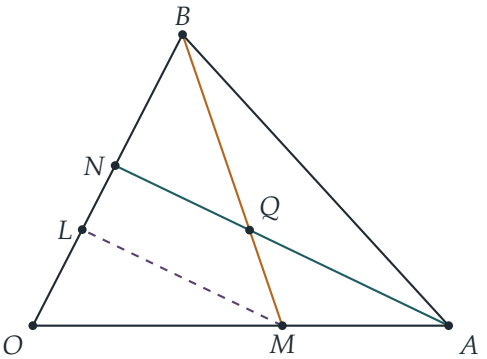
继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/18-s2-q7

关键思路

由于 M 在 OA 上，而 N 在 OB 上，我们可以把 $\mathbf{m}$ 写成 $\mathbf{a}$ 的倍数，把 $\mathbf{n}$ 写成 $\mathbf{b}$ 的倍数。然后点 Q 可以从两条路径到达：一次沿 BM，一次沿 AN。每条路径都把 $\mathbf{q}$ 表示为 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的组合。由于 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 不平行（parallel），我们可以比较系数（compare coefficients），所有结果便由此而得。

解答



求 m

设 $\mathbf{m} = m\,\mathbf{a}$ 及 $\mathbf{n} = n\,\mathbf{b}$，其中 $0 < m < 1$ 及 $0 < n < 1$，因为 M 和 N 都在三角形的边上。

沿 BM。Q 位于 M 与 B 之间，且 $MQ : QB = \mu : 1$，所以 Q 位于由 M 到 B 全程的 $\frac{\mu}{1+\mu}$

处：

$$\mathbf{q} = \mathbf{m} + \frac{\mu}{1+\mu}(\mathbf{b} - \mathbf{m}) = \frac{1}{1+\mu}\,\mathbf{m} + \frac{\mu}{1+\mu}\,\mathbf{b} = \frac{m}{1+\mu}\,\mathbf{a} + \frac{\mu}{1+\mu}\,\mathbf{b}.$$

沿 AN。同理，$NQ : QA = \nu : 1$，所以

$$\mathbf{q} = \mathbf{n} + \frac{\nu}{1+\nu}(\mathbf{a} - \mathbf{n}) = \frac{\nu}{1+\nu}\,\mathbf{a} + \frac{1}{1+\nu}\,\mathbf{n} = \frac{\nu}{1+\nu}\,\mathbf{a} + \frac{n}{1+\nu}\,\mathbf{b}.$$

想一想 为甚么我们可以分别令 **a** 的系数相等，以及 **b** 的系数相等?

O、A、B 是一个真正三角形的顶点，所以 **a** 与 **b** 都非零且不平行。若 $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = \mathbf{0}$ 而 $\beta \neq 0$，则 **b** 会是 **a** 的倍数；所以 $\beta = 0$，继而 $\alpha = 0$。因此平面上每个向量都只有唯一一种表示为 **a** 与 **b** 组合的方式。

把 **q** 的两个表达式相减并比较系数：

$$\frac{m}{1+\mu} = \frac{\nu}{1+\nu}, \qquad \frac{\mu}{1+\mu} = \frac{n}{1+\nu}.$$

第一式给出 $m = \dfrac{(1+\mu)\nu}{1+\nu}$，即

$$\mathbf{m} = \frac{(1+\mu)\nu}{1+\nu}\,\mathbf{a},$$

正如所求。第二式以角色互换的同一论证给出

$$\mathbf{n} = \frac{\mu(1+\nu)}{1+\mu}\,\mathbf{b}.$$

求 λ

现在 $\mathbf{l} = \lambda\mathbf{b}$，所以

$$\overrightarrow{ML} = \lambda\mathbf{b} - m\,\mathbf{a}, \qquad \overrightarrow{AN} = n\,\mathbf{b} - \mathbf{a}.$$

两者平行当且仅当对某个纯量（scalar）k 有 $\overrightarrow{ML} = k\,\overrightarrow{AN}$。比较 **a** 的系数（理由同前）得 $k = m$，再由 **b** 的系数得 $\lambda = kn = mn$。（从几何角度看：$ML \parallel AN$ 使三角形 OML 与 OAN 相似（similar），所以 $OL/ON = OM/OA$。）因此

$$\lambda = mn = \frac{(1+\mu)\nu}{1+\nu} \cdot \frac{\mu(1+\nu)}{1+\mu} = \mu\nu.$$

条件 $\mu\nu < 1$

$$m < 1 \iff (1+\mu)\nu < 1+\nu \iff \mu\nu < 1,$$
$$n < 1 \iff \mu(1+\nu) < 1+\mu \iff \mu\nu < 1,$$

这里利用了 $1+\nu>0$ 及 $1+\mu>0$ 来消去分母。所以，在 μ 和 ν 均为正数的前提下，条件 $\mu\nu<1$ 正正就是 M 严格位于 O 与 A 之间、N 严格位于 O 与 B 之间所需的条件。换句话说，直线 AN 与 BM（Q 按这些比把它们分割）在三角形内部相交。这条件亦表示 $\lambda<1$：经过 M 而平行于 AN 的直线与 OB 相交于 O 与 B 之间，而由于 M 在边 OA 上，这是必然的。若 $\mu\nu=1$，则 $M=A$ 及 $N=B$，整个图形退化；若 $\mu\nu>1$，则 M 和 N 位于延长边上 A 和 B 之外。

验算

- 中线。若 M 和 N 是中点，则 Q 是重心（centroid），它把每条中线（median）分成由顶点起计 $2:1$ 的比。所以 $\mu=\nu=\frac{1}{2}$，而公式给出 $m=\frac{(3/2)(1/2)}{3/2}=\frac{1}{2}$，与预期相符。于是 $\lambda=\frac{1}{4}$：在三角形 OAN 中应用中点定理（midpoint theorem），L 是 ON 的中点，即位于 OB 全长的四分之一处。
- 对称性。互换 $A\leftrightarrow B$ 会互换 $M\leftrightarrow N$ 及 $\mu\leftrightarrow\nu$，而 m 与 n 的公式亦正确地互换。答案 $\lambda=\mu\nu$ 同样是对称的。
- 以电脑对约 10^5 个随机三角形进行验算，在边上随机取 M 和 N，量度 μ 和 ν，并确认 m、n 及 $\lambda=\mu\nu$ 均准确至 10^{-12} 以内。例如 $m=0.6$ 及 $n=0.55$（如图所示）给出 $\lambda=0.33$。

常见错误

- 把分点比（section ratio）的方向弄反：Q 位于由 M 到 B 全程的 $\frac{\mu}{1+\mu}$ 处，而不是由 B 到 M。
- 令系数相等而不说明原因。这一步依赖 **a** 与 **b** 不平行。
- 以为“三角形是锐角三角形”这个条件会起作用。其实不会：论证对任何三角形都成立。

STEP 之外

比较系数之所以可行，是因为 **a** 与 **b** 线性无关（linearly independent），所以它们构成平面的一组基（basis）。这是大学第一个线性代数（linear algebra）课程的核心概念。简洁的答案 $\lambda=\mu\nu$ 是一个比例结果，与塞瓦定理（Ceva's theorem）及梅涅劳斯定理（Menelaus' theorem）同属一类，而这些定理用重心坐标（barycentric coordinates）表达最为简洁。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《线性代数导论》）对基与坐标有细致的阐述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。