详细解答

STEP II 2018，第 6 题

纯数学 • 阶乘与质数

> **STEP II 2018，第 6 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/18-s2-q6

关键思路

两部分都取决于同一个事实：质数（prime）p 整除（divides）$k!$ 当且仅当 $p \leq k$。在 (i) 中，一旦 $n \geq 5$，阶乘（factorial）便是 5 的倍数，所以 $n! + 5$ 也是。在 (ii) 中，左方只由不超过 $2n-1$ 的数构成，因此任何大于 $2n-1$ 的质数都不能整除它。如果 $m!$ 大得足以包含这样一个质数，方程便不成立。题中的两个定理，作用正是令 m 足够大，并提供那个质数。

解答

第 (i) 部分

当 $n \geq 5$ 时，5 是 $n!$ 的其中一个因数，所以 $5 \mid n!$，从而 $5 \mid n! + 5$。但 $n! + 5 > 5$，所以 $n! + 5$ 有一个严格介乎 1 与其本身之间的因数 5，因此不是质数。故此只需检查 $n \leq 4$：

$$1! + 5 = 6, \qquad 2! + 5 = 7, \qquad 3! + 5 = 11, \qquad 4! + 5 = 29.$$

6 不是质数，其余三个都是。解为

$$(n, p) = (2, 7),\ (3, 11),\ (4, 29).$$

第 (ii) 部分

记 $P_n = 1! \times 3! \times \cdots \times (2n-1)!$。这些阶乘中的每一个因数，都是介乎 1 与 $2n-1$ 之间的整数。因此若质数 q 整除 P_n，由于 q 是质数，它必整除其中一个整数，所以 $q \leq 2n-1$。这就得出关键事实：

$$\text{没有质数} q > 2n-1 \text{ 整除} P_n. \qquad (*)$$

另一方面，每个质数 $q \le m$ 都整除 $m!$。所以若 $P_n = m!$，则 m 小于每一个大于 $2n-1$ 的质数。

n 较大时。 假设 $n \ge 7$ 且 $P_n = m!$。由定理 1，$m! = P_n > (4n)!$，所以 $m > 4n$（阶乘是递增的）。由定理 2，存在质数 q 使得 $2n < q < 4n$。于是 $q < 4n < m$，所以 $q \mid m! = P_n$。但 $q > 2n > 2n-1$，这与 $(*)$ 矛盾（contradiction）。因此 $n \ge 7$ 时没有解。

> **想一想** 为甚么我们不能对所有 n 都直接引用这两个定理?

定理 1 只声称对 $n \ge 7$ 成立，而事实上它在 $n = 6$ 时并不成立。所以 $n = 1, \ldots, 6$ 需要逐一亲手检查。我们再次利用 $(*)$ 来简化计算。

n 较小时。

- $n = 1$：$P_1 = 1 = 1!$，所以 $m = 1$。
- $n = 2$：$P_2 = 1 \times 6 = 6 = 3!$，所以 $m = 3$。
- $n = 3$：$P_3 = 6 \times 120 = 720 = 6!$，所以 $m = 6$。
- $n = 4$：$P_4 = 720 \times 5040$。由于 $720 = 6!$ 且 $5040 = 7 \times 8 \times 9 \times 10$，得 $P_4 = 6! \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 = 10!$，所以 $m = 10$。
- $n = 5$：$P_5 = P_4 \times 9! = 10! \times 9! > 10!$，所以 $m \ge 11$。于是质数 11 整除 $m!$，但 $11 > 9 = 2n-1$，与 $(*)$ 矛盾。无解。
- $n = 6$：$P_6 = 10! \times 9! \times 11! > 12!$（因为 $10! \times 9! > 12$），所以 $m \ge 13$。于是质数 13 整除 $m!$，但 $13 > 11 = 2n-1$，与 $(*)$ 矛盾。无解。

在每个有解的情况中，m 都是唯一的，因为正整数的阶乘从 $2!$ 起严格递增（而 $1! = 1 < 2!$）。所以解为

$$(n, m) = (1, 1),\ (2, 3),\ (3, 6),\ (4, 10).$$

验算

恒等式 $1!\,3!\,5!\,7! = 10!$ 很容易验证：两边都等于 3 628 800。以电脑在 $n \le 59$ 及 $m < 400$ 范围内搜索，恰好找到上述四组解，并确认 $n! + 5$ 只在 $n = 2, 3, 4$ 时是质数（搜索范围 $n \le 30$）。搜索亦确认定理 1 在 $n = 6$ 时不成立，这正是为何确实需要亲手检查 $n = 5$ 和 $n = 6$。

常见错误

- 在第 (ii) 部分遗漏 $n = 1$：此时乘积只有单一因数 1!，所以 $(1, 1)$ 是一个解。
- 对 $n = 5$ 或 $n = 6$ 使用定理 1。定理只对 $n \geq 7$ 陈述，所以这两个情况需要各自的论证。
- 未检查 $q \leq m$ 便声称“$q \mid m!$”。这正是我们需要由定理 1 得出 $m > 4n$ 的原因。

STEP 之外

定理 2 就是伯特兰公设（Bertrand's postulate）：对每个 $n \geq 1$，都存在质数 p 使得 $n < p \leq 2n$。切比雪夫（Chebyshev）于 1852 年证明了它，后来艾狄胥（Erdős）利用中心二项式系数（central binomial coefficient）$\binom{2n}{n}$ 给出了一个优美的初等证明。像 $n! + 1 = m^2$ 这类方程（布罗卡问题，Brocard's problem）至今仍未解决。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算术》）是深入学习质数与阶乘算术的好起点。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。