详细解答

STEP II 2018，第 5 题

纯数学 · 级数的积分

STEP II 2018，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/18-s2-q5

关键思路

每一部分都是先把函数化成幂级数（power series），再逐项（term by term）积分。在 (i) 中，这只不过是对一个几何级数（geometric series）积分。在 (ii) 中，把指数函数展开后，每一项都变成形如 $\int_0^\infty x^m \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ 的积分，而这个积分是一个阶乘（factorial）；阶乘互相约去后，剩下的正好是 (i) 中的级数。至于 (iii)，分母中的 $\ln x$ 就是线索：代换（substitution）$x = \mathrm{e}^{-t}$ 会把它变成 $-t$，并把整个积分变成两个 (ii) 中的积分。

解答

第 (i) 部分

当 $|x| < 1$ 时，二项式展开（binomial expansion）（即公比为 $-x$ 的几何级数）为

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n.$$

将两边由 0 积分至 x。左边，由于 $\ln 1 = 0$，所以 $\int_0^x \frac{\mathrm{d}u}{1+u} = \ln(1+x)$。右边逐项积分，得

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \qquad (\text{将} n+1 \text{ 换成} n) \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n},\end{aligned}$$

这正是 $|x| < 1$ 时所要求的结果。

第 (ii) 部分

对所有 x，

$$\mathrm{e}^{-ax} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ax)^n}{n!} = 1 - ax + \frac{a^2x^2}{2!} - \frac{a^3x^3}{3!} + \cdots .$$

$n = 0$ 的一项是 1，所以

$$\frac{1 - \mathrm{e}^{-ax}}{x} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-a)^n x^{n-1}}{n!}.$$

在这里除以 x 并无问题：余下的每一项都含有因子 x，所以被积函数（integrand）在 $x = 0$ 处完全正常（它趋向 a）。乘以 e^{-x} 再逐项积分（题目说可以不理会收敛（convergence）问题），得

$$\int_0^{\infty} \frac{(1 - \mathrm{e}^{-ax})\,\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-a)^n}{n!} I_{n-1}, \qquad \text{其中} I_m = \int_0^{\infty} x^m \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

想一想 I_m 是甚么？

取 $u = x^m$ 及 $\mathrm{d}v = \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ 进行分部积分（integration by parts）。当 $m \geq 1$ 时，

$$I_m = \Big[-x^m \mathrm{e}^{-x} \Big]_0^{\infty} + m \int_0^{\infty} x^{m-1} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = m I_{m-1},$$

因为当 $x \to \infty$ 时 $x^m \mathrm{e}^{-x} \to 0$（指数函数占上风），而在 $x = 0$ 处它等于 0。由于 $I_0 = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 1$，可得 $I_m = m!$。

所以 $I_{n-1} = (n-1)!$，而 $\dfrac{(n-1)!}{n!} = \dfrac{1}{n}$。因此

$$\int_0^{\infty} \frac{(1 - \mathrm{e}^{-ax})\,\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-a)^n}{n} = \ln(1 + a),$$

这里用了第 (i) 部分并取 $x = a$；由于 $|a| < 1$，这是容许的。这正是所要求的结果。

第 (iii) 部分

代入 $x = \mathrm{e}^{-t}$，使得 $\ln x = -t$ 及 $\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$。当 x 由 0 变到 1 时，t 由 ∞ 减至 0。此外 $x^p = \mathrm{e}^{-pt}$ 及 $x^q = \mathrm{e}^{-qt}$。因此

$$\int_0^1 \frac{x^p - x^q}{\ln x}\,\mathrm{d}x = \int_{\infty}^0 \frac{\mathrm{e}^{-pt} - \mathrm{e}^{-qt}}{-t}\left(-\mathrm{e}^{-t}\right)\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} \frac{\left(\mathrm{e}^{-qt} - \mathrm{e}^{-pt}\right)\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t,$$

其中两个负号互相抵消，而对调上下限则令 p 和 q 互换。现在写成 $\mathrm{e}^{-qt} - \mathrm{e}^{-pt} = \left(1 - \mathrm{e}^{-pt}\right) - \left(1 - \mathrm{e}^{-qt}\right)$，并把积分拆开。每一部分都是 (ii) 中的形式，分别取 $a = p$ 和 $a = q$，而两者都满足 $|a| < 1$。所以

$$\int_0^1 \frac{x^p - x^q}{\ln x}\,\mathrm{d}x = \ln(1 + p) - \ln(1 + q) = \ln\left(\frac{1 + p}{1 + q}\right).$$

把积分拆开是合理的，因为两个积分各自都收敛：由 (ii)，每一个都有有限的值。

验算

- 若 $p=q$，被积函数为零，而 $\ln\frac{1+p}{1+p}=0$ 亦确实如此。
- 互换 p 和 q，被积函数和答案都会变号。
- 符号检查：当 $0<x<1$ 时，$\ln x<0$；若 $p<q$，则 $x^p>x^q$，所以被积函数为负，而 $\ln\frac{1+p}{1+q}$ 亦为负。
- 取 $p=\frac{1}{2}$、$q=0$，答案为 $\ln\frac{3}{2}\approx 0.405465$。以数值方法计算 $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}-1}{\ln x}\,\mathrm{d}x$ 得到相同的值；随机在 $(-1,1)$ 中选取 p 和 q，结果与公式吻合至小数点后六位。

常见错误

- 忘记 e^{-ax} 中 $n=0$ 的一项会与 1 抵消，结果试图积分 e^{-x}/x，而这个积分在 0 处发散。
- 在 (iii) 的代换中弄错符号：要追踪三个负号（分别来自 $\ln x$、$\mathrm{d}x$ 及对调上下限），弄错其中一个就会得到 $\ln\frac{1+q}{1+p}$。
- 写成 $I_{n-1}=n!$ 而不是 $(n-1)!$；这样阶乘就不再约成 $\frac{1}{n}$。

STEP 之外

积分 $I_m=\int_0^\infty x^m\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=m!$ 就是伽玛函数（gamma function）$\Gamma(m+1)$，它把阶乘推广到非整数。(iii) 中的积分是“积分号下求导”（differentiating under the integral sign）的经典例子：对 p 求导可以消去麻烦的 $\ln x$，只剩下 $\int_0^1 x^p\,\mathrm{d}x=\frac{1}{p+1}$。事实上，只要 $p,q>-1$，结果都成立。题目叫我们不必理会的“交换求和与积分次序”，在数学分析课程中是以一致收敛（uniform convergence）或控制收敛（dominated convergence）来证明其合理性的。如想了解这些步骤背后的分析，可参阅 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。