详细解答

STEP II 2018，第 4 题

纯数学 · 三角方程

STEP II 2018，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/18-s2-q4

关键思路

题目给出的恒等式（identity）把余弦之和化为乘积，而解一条等于零的方程时，我们正需要乘积。在 (i) 中，把头尾两项配对、中间两项配对，立即得到一个公因子（common factor）。在 (ii) 和 (iii) 中，有用的做法是把一切以两角的半和与半差表示；这样一来，(ii) 可以因式分解（factorise），而 (iii) 则变成两个平方之和等于零。

解答

第 (i) 部分

把第一项与最后一项配对，中间两项配对。由恒等式，

$$\cos x + \cos 4x = 2\cos\tfrac{5x}{2}\cos\tfrac{3x}{2},$$
$$3(\cos 2x + \cos 3x) = 6\cos\tfrac{5x}{2}\cos\tfrac{x}{2}.$$

（由于余弦是偶函数（even function），我们可写 $\cos(-\frac{3x}{2}) = \cos\frac{3x}{2}$。）因此左边为

$$2\cos\tfrac{5x}{2}\left(\cos\tfrac{3x}{2} + 3\cos\tfrac{x}{2}\right).$$

设 $c = \cos\frac{x}{2}$，由三倍角公式（triple-angle formula）$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ 得 $\cos\frac{3x}{2} = 4c^3 - 3c$，所以括号内正好是 $4c^3$。因此方程为

$$8\cos\tfrac{5x}{2}\cos^3\tfrac{x}{2} = 0.$$

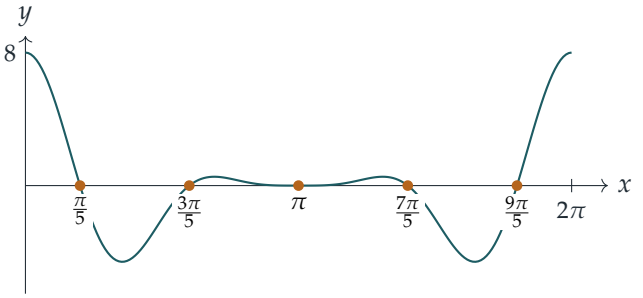
第一个因子。$\cos\frac{5x}{2} = 0$ 即 $\frac{5x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$，其中 k 为整数，亦即 $x = \frac{(2k+1)\pi}{5}$。要 $0 \le x \le 2\pi$，须 $0 \le 2k+1 \le 10$，所以 $k = 0, 1, 2, 3, 4$。

第二个因子。$\cos\frac{x}{2}=0$ 且 $0\le\frac{x}{2}\le\pi$，只得 $\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\pi$，而这已在上面的列表中。

因此解为

$$x=\frac{\pi}{5},\ \frac{3\pi}{5},\ \pi,\ \frac{7\pi}{5},\ \frac{9\pi}{5}.$$

左边的图像显示了这些解；在 $x=\pi$ 处，$\cos\frac{5x}{2}$ 和 $\cos^3\frac{x}{2}$ 同时为零，所以曲线在该处只是触及横轴，而不是穿过它。



第 (ii) 部分

对头两项使用恒等式，并利用 $\cos 2x=2\cos^2 x-1$，

$$\cos(x+y)+\cos(x-y)-\cos 2x=2\cos x\cos y-2\cos^2 x+1.$$

令它等于 1，得

$$2\cos x\,(\cos y-\cos x)=0,$$

所以 $\cos x=0$ 或 $\cos y=\cos x$。

- 若 $\cos x=0$ 且 $0\le x\le\pi$，则 $x=\frac{\pi}{2}$（此时任何 y 皆可）。
- 若 $\cos y=\cos x$，则 $x=y$，因为余弦在 $[0,\pi]$ 上严格递减（strictly decreasing），所以在该区间内每个值只取一次。

所以 $x=y$ 或 $x=\frac{\pi}{2}$，得证。

第 (iii) 部分

设 $s=\frac{1}{2}(x+y)$ 及 $d=\frac{1}{2}(x-y)$。由恒等式得 $\cos x+\cos y=2\cos s\cos d$，而 $\cos(x+y)=\cos 2s=2\cos^2 s-1$。方程变为

$$2\cos s\cos d-2\cos^2 s+1=\tfrac{3}{2}\iff 4\cos^2 s-4\cos s\cos d+1=0.$$

? **想一想** 一条方程，两个未知数：它怎能同时确定 x 和 y?

对 $\cos s$ 配方（complete the square）。由于 $1 = \cos^2 d + \sin^2 d$，

$$4\cos^2 s - 4\cos s\cos d + \cos^2 d + \sin^2 d = (2\cos s - \cos d)^2 + \sin^2 d = 0.$$

两个实数的平方之和为零，当且仅当两者皆为零，于是得到两条方程：

$$\sin d = 0 \qquad 及 \qquad 2\cos s = \cos d.$$

由于 $x, y \in [0, \pi]$，有 $-\frac{\pi}{2} \le d \le \frac{\pi}{2}$，而 sin 在此区间内唯一的零点是 $d = 0$。所以 $x = y$，于是 $s = x$ 且 $\cos d = 1$，得 $\cos x = \frac{1}{2}$。由 $0 \le x \le \pi$，即 $x = \frac{\pi}{3}$。

所以唯一的解是

$$x = y = \frac{\pi}{3}.$$

确实，$\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$。

同样的代数运算还说明了更多：对所有 x、y，

$$\tfrac{3}{2} - \big(\cos x + \cos y - \cos(x+y)\big) = \tfrac{1}{2}\big[(2\cos s - \cos d)^2 + \sin^2 d\big] \ge 0,$$

所以 $\frac{3}{2}$ 是左边所能取的最大值，而这条方程问的正是此最大值在何处取得。

验算

- 在 (i) 中，当 $x = \frac{\pi}{5}$：由于 $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$，有 $\cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} = 0$ 及 $\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{3\pi}{5} = 0$。当 $x = 0$，左边为 $1+3+3+1 = 8$，与 $8\cos 0\cos^3 0$ 吻合。
- 用电脑在 $[0, 2\pi]$ 上以细密网格搜索，恰好找到上述五个零点；在 $[0, \pi]^2$ 上以网格搜索，找到 $\cos x + \cos y - \cos(x+y)$ 的最大值为 1.5，且只在 $x = y \approx 1.0472 = \frac{\pi}{3}$ 处取得。
- 在 (ii) 中，$x = \frac{\pi}{2}$ 对每个 y 都给出 $\cos(\frac{\pi}{2} + y) + \cos(\frac{\pi}{2} - y) - \cos\pi = -\sin y + \sin y + 1 = 1$。

常见错误

- 把 $x = \pi$ 列了两次，或者漏掉了它：在 (i) 中它来自两个因子，但只算一个解。
- 在 (ii) 中，除以 $\cos x$，因而失去 $x = \frac{\pi}{2}$。
- 在 (iii) 中，停在关于 $\cos s$ 的二次方程，而没有利用判别式（discriminant）（或平方和）迫使 $\cos^2 d = 1$。

STEP 之外

(i) 中的系数 $1,3,3,1$ 并非巧合：左边是 $e^{ix}(1+e^{ix})^3$ 的实部（real part），而由于 $1+e^{ix} = 2\cos\frac{x}{2}\,e^{ix/2}$，一行便得到 $8\cos^3\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2}$。第 (iii) 部分其实是经典不等式（inequality）$\cos A+\cos B+\cos C \le \frac{3}{2}$ 的变装版本，其中 A、B、C 为三角形的三个角（令 $A = x$、$B = y$、$C = \pi - x - y$），等号只在等边三角形（equilateral triangle）时成立；像这样求二元函数的最大值，是大学一年级多变量微积分（multivariable calculus）的标准课题。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《可视化复分析》）展示了复指数如何令这类三角恒等式几乎变得自动成立。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。