详细解答

# STEP II 2018，第 3 题

纯数学 · 旋转对称与积分

**STEP II 2018，第 3 题**

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/18-s2-q3

## 关键思路

绕点 $(a,b)$ 作半周旋转（half-turn），会把 $(x,y)$ 映到 $(2a-x,\,2b-y)$。因此，具有这种对称性的曲线会把每个 $x$ 值与其反射值 $2a-x$ 配对，并使两个对应的高度之和为 $2b$。对正切函数而言，最自然的配对是 $x \leftrightarrow \frac{1}{2}\pi - x$，因为 $\tan(\frac{1}{2}\pi - x) = 1/\tan x$。单凭这一条恒等式，就能得出曲线的对称性；之后，对于关于中心对称的区间上的积分，根本不用真正积分也能求出结果。

## 解答

### 第 (i) 部分

设 $f(x) = (1+\tan x)^{-1}$，利用链式法则（chain rule），

$$f'(x) = -\frac{\sec^2 x}{(1+\tan x)^2} = -\frac{1}{\cos^2 x\,(1+\tan x)^2} = -\frac{1}{(\cos x + \sin x)^2}$$
$$= -\frac{1}{\cos^2 x + 2\sin x\cos x + \sin^2 x} = -\frac{1}{1+\sin 2x},$$

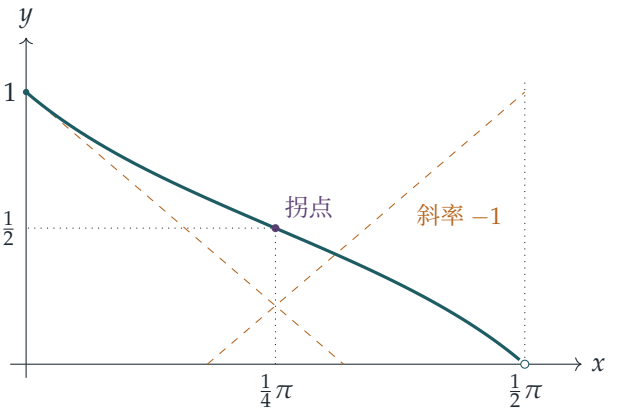
即为所求。（把 $1+\tan x$ 乘以 $\cos x$，正是令整个式子变得简洁的一步。）

至于值域（range），由 $0 \le x < \frac{1}{2}\pi$ 得 $0 \le 2x < \pi$，所以 $\sin 2x$ 取遍 $[0,1]$ 内的每个值：在 $x=0$ 时取值 0，在 $x=\frac{1}{4}\pi$ 时取值 1。因此 $1 \le 1+\sin 2x \le 2$。取倒数（由于各项皆为正数，不等号方向会反转），再取负号，得

$$-1 \le f'(x) \le -\tfrac{1}{2}.$$

两个端点都能取到：$f'(0) = -1$ 及 $f'(\frac{1}{4}\pi) = -\frac{1}{2}$。

关于草图：$f(0)=1$，$f(\frac{1}{4}\pi)=\frac{1}{2}$，而由于 $\tan x\to\infty$，当 $x\to\frac{1}{2}\pi$ 时 $f(x)\to 0$。曲线处处递减，斜率介乎 $-1$ 与 $-\frac{1}{2}$ 之间。曲线在 $x=0$ 处最陡（斜率 $-1$），在 $x=\frac{1}{4}\pi$ 处最平缓，而当 $x\to\frac{1}{2}\pi$ 时又再变陡，斜率趋向 $-1$。所以 $f'$ 在 $\frac{1}{4}\pi$ 处取得极大值，该点是一个拐点（point of inflection）：曲线在 $[0,\frac{1}{4}\pi)$ 上向上凹（concave up），在 $(\frac{1}{4}\pi,\frac{1}{2}\pi)$ 上向下凹（concave down）。（事实上 $f''(x)=2\cos 2x/(1+\sin 2x)^2$，它在 $\frac{1}{4}\pi$ 处变号。）




两条虚线的斜率均为 $-1$：一条是曲线在 $(0,1)$ 处的切线，另一条是当 $x\to\frac{1}{2}\pi$ 时曲线趋近的方向。曲线看来在绕 $(\frac{1}{4}\pi,\frac{1}{2})$ 作半周旋转下是对称的，而这正是本题余下部分的主题。

**第 (ii) 部分**

绕 $(a,b)$ 旋转 $\pi$ 会把 $(x,y)$ 映到 $(2a-x,\,2b-y)$，因为 $(a,b)$ 是一点与其像的中点。曲线关于 $(a,b)$ 具有二阶旋转对称（rotational symmetry of order 2），当且仅当这个旋转把曲线映成它自己。（要做到这一点，定义域（domain）必须关于 $x=a$ 对称，使得只要 $x$ 在定义域内，$2a-x$ 亦在定义域内。）

（$\Rightarrow$）假设曲线具有这种对称性。对定义域内任意 $x$，点 $(x,g(x))$ 在曲线上，所以其像 $(2a-x,\,2b-g(x))$ 亦在曲线上。由于曲线是函数的图像，曲线上 $x$ 坐标为 $2a-x$ 的点只有 $(2a-x,\,g(2a-x))$。所以 $g(2a-x)=2b-g(x)$，即

$$g(x)+g(2a-x)=2b.$$

（$\Leftarrow$）假设对定义域内每个 $x$ 都有 $g(x)+g(2a-x)=2b$。曲线上一般点 $(x,g(x))$ 的像是

$$(2a-x,\,2b-g(x))=(2a-x,\,g(2a-x)),$$

它在曲线上。所以这个旋转把曲线映入其自身；又由于旋转两次即得恒等变换，它把曲线映成其自身。在恒等式中代入 $x=a$，得 $g(a)=b$，与 $(a,b)$ 在曲线上一致。

至于积分, 关于原点对称即 $a=b=0$, 所以 $g(-x)=-g(x)$: $g$ 是奇函数 (odd function)。在左半部分作代换（substitution）$x=-u$,

$$\int_{-1}^{0} g(x)\,\mathrm{d}x=\int_{0}^{1} g(-u)\,\mathrm{d}u=-\int_{0}^{1} g(u)\,\mathrm{d}u,$$

所以两半互相抵消，得

$$\int_{-1}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

**第 (iii) 部分**

设 $h(x)=\dfrac{1}{1+\tan^k x}$，其中 $0<x<\frac{1}{2}\pi$。参考 (i) 的草图，尝试取 $a=\frac{1}{4}\pi$、$b=\frac{1}{2}$。定义域 $(0,\frac{1}{2}\pi)$ 关于 $\frac{1}{4}\pi$ 对称，且 $2a-x=\frac{1}{2}\pi-x$。

**想一想** 怎样化简 $h(\frac{1}{2}\pi-x)$?

利用 $\tan(\frac{1}{2}\pi-x)=\cot x=1/\tan x$，此式在 $0<x<\frac{1}{2}\pi$ 时成立，而此时 $\tan x>0$。于是，分子分母同乘以 $\tan^k x$,

$$h(\tfrac{1}{2}\pi-x)=\frac{1}{1+\tan^{-k}x}=\frac{\tan^k x}{\tan^k x+1},$$

所以

$$h(x)+h(\tfrac{1}{2}\pi-x)=\frac{1+\tan^k x}{1+\tan^k x}=1=2\cdot\tfrac{1}{2}.$$

由于 $\tan\frac{1}{4}\pi=1$ 给出 $h(\frac{1}{4}\pi)=\frac{1}{2}$，点 $(\frac{1}{4}\pi,\frac{1}{2})$ 在曲线上。由 (ii)，无论正常数 $k$ 取何值，曲线都关于 $(\frac{1}{4}\pi,\frac{1}{2})$ 具有二阶旋转对称。

至于积分，设 $I=\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} h(x)\,\mathrm{d}x$。区间 $[\frac{1}{6}\pi,\frac{1}{3}\pi]$ 关于 $\frac{1}{4}\pi$ 对称，所以代换 $x=\frac{1}{2}\pi-u$ 把它映成其自身（两端互换，正好抵消 $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}u$ 带来的负号）:

$$\begin{aligned}I&=\int_{\pi/6}^{\pi/3} h(\tfrac{1}{2}\pi-u)\,\mathrm{d}u=\int_{\pi/6}^{\pi/3}\big(1-h(u)\big)\,\mathrm{d}u\\&=\left(\tfrac{1}{3}\pi-\tfrac{1}{6}\pi\right)-I.\end{aligned}$$

因此 $2I=\frac{1}{6}\pi$，而

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{1}{1+\tan^k x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{12}.$$

从几何角度看，在矩形 $[\frac{1}{6}\pi,\frac{1}{3}\pi]\times[0,1]$ 内，半周旋转把曲线下方的区域与曲线上方的区域互换，所以面积是矩形面积的一半，即 $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\pi$。这正是把 (ii) 的论证中的 $g$ 换成 $h-\frac{1}{2}$。

## 验算

- 取 $k = 1$ 及 $x = \frac{1}{6}\pi$：$h = 1/(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{3}) \approx 0.634$；取 $x = \frac{1}{3}\pi$：$h = 1/(1 + \sqrt{3}) = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1) \approx 0.366$。两者之和为 1，与对称性所言相符。
- 答案与 $k$ 无关。当 $k \to \infty$ 时，$h$ 在 $x < \frac{1}{4}\pi$ 时接近 1，在 $x > \frac{1}{4}\pi$ 时接近 0，所以积分趋向区间 $[\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{4}\pi]$ 的长度，即 $\frac{1}{12}\pi$，结果一致。
- 对 $k = 0.3$、1、2、3.7 及 10 作数值积分，每次都得 0.2617994，与 $\pi/12 \approx 0.2617994$ 吻合。

## 常见错误

- 在 (i) 中把值域写成 $-1 < f'(x) \leq -\frac{1}{2}$：值 $-1$ 在 $x = 0$ 处取到，而 $x = 0$ 在定义域内。
- 在 (ii) 中只证明一个方向。“当且仅当”需要同时证明对称性 $\Rightarrow$ 恒等式，以及恒等式 $\Rightarrow$ 对称性。
- 在 (iii) 中尝试直接积分 $1/(1 + \tan^k x)$。对一般的 $k$，根本找不到初等原函数（elementary antiderivative），而对称性才是整道题的关键。

## STEP 之外

(iii) 中的技巧,即作代换 $x \mapsto a + b - x$ 后把积分与自身相加,常被称为“King 法则”(King's rule)。它是利用定义域的对称性来简化积分的一个特例；这个想法在群论（group theory）和物理学中占有核心地位，因为问题的对称性可以预言哪些积分为零（如 (ii)），或取简单的值。同样的推理可求得对每个 $k > 0$ 都有 $\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1+\tan^k x} = \frac{1}{4}\pi$。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《数学进阶问题》）收录了更多可以用这类对称论证解决的积分。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。