详细解答

STEP II 2018，第 2 题

纯数学 · 凹函数

STEP II 2018，第 2 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/18-s2-q2

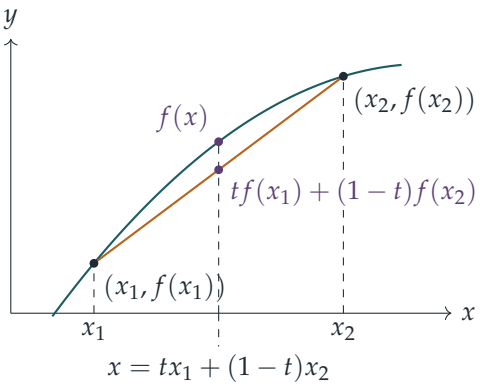
关键思路

当 t 由 0 变到 1 时，点 $tx_1 + (1-t)x_2$ 由 x_2 移到 x_1，而 $tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$ 就是弦（chord）在该点上方的高度。所以凹性（concavity）的意思是：每一条弦都位于曲线之上或之下——准确来说，在曲线上或曲线下方。掌握了这条两点不等式之后，只要用两次就得到三点的版本；再把它应用于适当的凹函数（concave function），并利用 $A + B + C = \pi$，两条三角形不等式便随之而来。

解答

示意图

设 $x = tx_1 + (1-t)x_2$。那么点 $(x,\ tf(x_1) + (1-t)f(x_2))$ 把由 $(x_2, f(x_2))$ 到 $(x_1, f(x_1))$ 的弦按 $(1-t) : t$ 的比分割，所以它位于弦上、正好在 x 的正上方（或正下方）。定义所说的是：曲线在 x 处的高度至少与弦一样高。



为何 $f'' < 0$ 推出凹性

若 $x_1 = x_2$，或 $t = 0$ 或 $t = 1$，不等式取等号，所以可设 $0 < t < 1$，并不失一般性（without loss of generality）设 $x_1 < x_2$（对调 x_1, x_2 只不过是对调 t 与 $1 - t$）。于是 $x = tx_1 + (1-t)x_2$ 满足 $x_1 < x < x_2$，且

$$x - x_1 = (1-t)(x_2 - x_1), \qquad x_2 - x = t(x_2 - x_1).$$

由中值定理（mean value theorem），存在 $c_1 \in (x_1, x)$ 及 $c_2 \in (x, x_2)$，使得

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(c_1), \qquad \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(c_2).$$

由于在 (a, b) 上 $f'' < 0$，f' 在该区间上严格递减（strictly decreasing），而 $c_1 < c_2$，所以 $f'(c_1) > f'(c_2)$。代入上面的长度，并约去正因子 $x_2 - x_1$，得

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{1 - t} > \frac{f(x_2) - f(x)}{t}.$$

两边乘以 $t(1-t) > 0$，得 $tf(x) - tf(x_1) > (1-t)f(x_2) - (1-t)f(x)$，即

$$f(x) > tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$

所以 f 在 (a, b) 上是凹函数。用文字来说：曲线的斜率不断下降，所以由 x_1 到 x 的斜率大于由 x 到 x_2 的斜率，曲线便向上鼓起，高于弦。

第 (i) 部分

想一想 哪两个点、用甚么权重，加权平均后会得到 $\frac{1}{3}(u + v + w)$?

把 v 和 w 归为一组：取 $x_1 = u$、$x_2 = \frac{1}{2}(v + w)$ 及 $t = \frac{1}{3}$。由于 x_2 介于 v 与 w 之间，它位于 (a, b) 内，而且

$$tx_1 + (1-t)x_2 = \tfrac{1}{3}u + \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{1}{2}(v + w) = \tfrac{1}{3}(u + v + w).$$

由定义得

$$f\Big(\frac{u+v+w}{3}\Big) \geq \tfrac{1}{3}f(u) + \tfrac{2}{3}f\Big(\frac{v+w}{2}\Big).$$

现在再用一次定义，取 $x_1 = v$、$x_2 = w$、$t = \frac{1}{2}$：$f(\frac{1}{2}(v+w)) \geq \frac{1}{2}f(v) + \frac{1}{2}f(w)$。由于这一项的系数 $\frac{2}{3}$ 是正数，代入后不等号的方向不变：

$$f\Big(\frac{u+v+w}{3}\Big) \geq \tfrac{1}{3}f(u) + \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{1}{2}(f(v)+f(w)) = \frac{f(u)+f(v)+f(w)}{3},$$

这就是所求的结果。

第 (ii) 部分

在 $0 < x < \pi$ 上取 $f(x) = \sin x$。此时 $f''(x) = -\sin x < 0$，所以 sin 在 $(0,\pi)$ 上是凹函数。三角形的内角满足 $0 < A, B, C < \pi$ 及 $A + B + C = \pi$，因此在第 (i) 部分中取 $u = A$、$v = B$、$w = C$，得

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3} \leq \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

所以 $\sin A + \sin B + \sin C \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$。

第 (iii) 部分

当 $0 < x < \pi$ 时 $\sin x > 0$，所以 $g(x) = \ln(\sin x)$ 在该区间上有定义，且

$$g'(x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x, \qquad g''(x) = -\operatorname{cosec}^2 x < 0.$$

所以 g 在 $(0,\pi)$ 上是凹函数，由第 (i) 部分得

$$\frac{\ln\sin A + \ln\sin B + \ln\sin C}{3} \leq \ln\sin\frac{\pi}{3} = \ln\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

两边乘以 3 并合并对数，得 $\ln(\sin A \sin B \sin C) \leq \ln(\frac{\sqrt{3}}{2})^3$。由于 exp 是递增函数，

$$\sin A \times \sin B \times \sin C \leq \Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

验算

两个上界都由等边三角形（equilateral triangle）取到：$3\sin\frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2.598$，以及 $\sin^3\frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{8} \approx 0.6495$。等腰直角三角形给出的和是 $1+\sqrt{2} \approx 2.414$，积是 $\frac{1}{2}$，两者都低于上界。用电脑检验 200 000 个随机三角形，没有一个的和超过 2.598076，也没有一个的积超过 0.649519。非常扁平的三角形（$A, B \to 0$，$C \to \pi$）会令两者都趋向 0，正如预期。

常见错误

- 在第 (i) 部分，若取 $t = \frac{1}{3}$、$x_1 = u$、$x_2 = v$，得到的是 $\frac{1}{3}u + \frac{2}{3}v$，并非三个数的平均值；第二个点必须是 v 与 w 的中点。
- 在第 (iii) 部分，不能直接把第 (ii) 部分的不等式套用到乘积上；要靠对数把乘积化为和。另外也要检查 $\ln \sin x$ 有定义，这需要 $\sin x > 0$。
- 只说 $f'' < 0$“意味着曲线向下弯”，本身并不构成弦不等式的证明；中值定理的论证才令它变得严谨。

STEP 之外

第 (i) 部分是琴生不等式（Jensen's inequality）的三点情况：对凹函数 f 及总和为 1 的权重 $t_i \geq 0$，有 $f\left(\sum t_i x_i\right) \geq \sum t_i f(x_i)$，其证明正是用归纳法（induction），做法与这里完全一样。取 $f = \ln$，便得到算术—几何平均不等式（AM–GM inequality）；在概率论中，它说的是对凹函数 f，有 $f(\mathrm{E}[X]) \geq \mathrm{E}[f(X)]$。凸函数（convex function）与凹函数，以及第二段背后的中值定理，在 Bartle 与 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis*（《实分析导论》）中有详细而严谨的讨论。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。